FARE MATEMATICA METTENDOCI LE MANI

Il curricolo di matematica per il secondo biennio della scuola secondaria di secondo grado: dalle scelte didattiche alla declinazione in classe

Luciano Cappello e Sandro Innocenti

iprase
apprendimento ricerca innovazione

IPRASE – Istituto provinciale per la ricerca
e la sperimentazione educativa
via Tartarotti 15 – 38068 Rovereto (TN)
C.F. 96023310228
tel. 0461 494500 – fax 0461 499266
iprase@iprase.tn.it, iprase@pec.provincia.tn.it
www.iprase.tn.it

Prima pubblicazione maggio 2023

Realizzazione grafica e stampa:
ReactivA cooperativa sociale - Trento

ISBN 978-88-7702-531-9

Il volume è disponibile all'indirizzo www.iprase.tn.it
alla voce risorse>pubblicazioni

FARE MATEMATICA METTENDOCI LE MANI

Il curricolo di matematica per il secondo biennio della scuola secondaria di secondo grado: dalle scelte didattiche alla declinazione in classe

Luciano Cappello e Sandro Innocenti

IPRASE per l’ambiente

Questo documento è stampato interamente su carta certificata FSC®
(Forest Stewardship Council®), prodotta con cellulosa proveniente da foreste gestite in modo responsabile, secondo rigorosi standard ambientali, sociali ed economici.

Gli aspetti di un curricolo come pietre di un arco:

ciascuno non è importante in sé

ma per come è disposto rispetto agli altri.

Organizziamoli in una struttura robusta e,

insieme agli studenti, rendiamola un ponte.

Indice

Introduzione

Dal primo biennio al secondo biennio

Questo volume è la naturale prosecuzione al secondo biennio del testo *Facciamo la matematica che conta (*[Cappello e Innocenti, 2022]), lavoro che illustra una proposta organica per il curricolo di matematica del *primo biennio* della scuola secondaria di secondo grado. Il riscontro ottenuto e le richieste di numerosi docenti ci hanno, infatti, impegnato ad organizzare le idee, l'esperienza e alcuni materiali didattici relativi alla classe terza e alla classe quarta in un volume analogo, realizzato anch'esso nell'ambito del *Progetto sul curricolo e sulle metodologie didattiche per la matematica della scuola secondaria di secondo grado*, che prevede la collaborazione di IPRASE e dell'Università di Trento, con la partecipazione delle scuole.

Il senso e la portata di questo rilevante progetto, le ragioni sottese e i diversi aspetti che lo definiscono, dagli obiettivi alle azioni compiute, sono ampiamente descritti nel volume per il primo biennio e in [Cappello e Innocenti, 2018], ma ci sembra comunque utile richiamarli sinteticamente prima di entrare nel merito di cosa si trova nel libro e prima di ricordare il significato dei materiali che lo accompagnano. Con qualche aggiunta, però, visto che nel corso di quest'anno scolastico le esperienze vissute, i docenti con cui ci siamo confrontati e gli studenti assieme ai quali abbiamo costruito le lezioni ci hanno insegnato ancora qualcosa; d'altronde, come potrebbe essere diversamente?

Ricordiamo le motivazioni

"Gli studenti non studiano", "gli studenti non ricordano", "i contenuti da affrontare sono troppi", "la matematica non la capisco", "la matematica non serve[1]"… Sono frasi che, a volte, si sentono a scuola e rispecchiano episodi o circostanze che probabilmente ciascuno di noi ha vissuto, e che possiamo sintetizzare dicendo che:

> *La matematica che si fa a scuola non ha sempre un senso per gli studenti, e nemmeno per i docenti.*
> *Quanto gli studenti apprendono a scuola non resta sempre disponibile a lungo.*

Pur nella complessità della situazione, riteniamo che ciò dipenda in parte anche da noi docenti – non solo da noi naturalmente –, a cominciare da *cosa* proponiamo in classe e da *come* lo facciamo, ovvero da quali contenuti consideriamo, da quali abilità curiamo e da quale metodologia didattica adottiamo. Lo dice anche la ricerca, ad esempio [Silver, 2009].

Qualcosa si può, e si dovrebbe, fare: ad esempio, si può cogliere l'*occasione* per fermarsi a riflettere su quali contenuti sono *davvero* significativi, distinguendoli da quelli che consideriamo solo per consuetudine o perché non affrontarli ci farebbe sentire a disagio, quasi svilissimo la matematica che si discute in classe.

Ci sono comunque ulteriori ragioni per riflettere sul curricolo. Tra queste ci sono i *nuovi* contenuti e le nuove attenzioni previste dalle *Indicazioni nazionali* [MIUR, 2010], dalle *Linee guida* nazionali [MIUR, 2010a, b] e dalle *Linee guida* della provincia di Trento per la scuola secondaria di secondo grado [PAT, 2013], come il calcolo delle probabilità, come modellizzare e argomentare, ma soprattutto come l'invito a considerare *pochi* concetti e metodi fondamentali e ad analizzarli in profondità, spostando così il focus dalla quantità alla *qualità* di ciò che si costruisce assieme agli studenti.

Non è nuova, invece, la constatazione che i ragazzi manifestano *difficoltà* in matematica dalla classe prima fino al passaggio scuola-università; si veda ad esempio [Anzellotti, 2008] e la rilevazione [INVALSI, 2019], l'ultima prima della pandemia di Covid-19: il 42% degli studenti della classe quinta non "raggiunge il livello 3, considerato come livello adeguato di raggiungimento dei traguardi delle Indicazioni nazionali/ Linee guida" (pag. 74). Con questo non si vuole certo dire che il 42% degli studenti delle classi quinte non sa la matematica! Sarebbe una

---

[1] *La matematica non serve a nulla* è anche il titolo, volutamente provocatorio, del libro [Bolondi e D'Amore, 2010]. È la frase che uno degli autori ha letto su un muro di Bologna, vicino ad una scuola.

semplificazione eccessiva, ma è comunque un risultato su cui riflettere, data l'autorevolezza della rilevazione.

Un ulteriore spunto è offerto dagli esiti degli studenti italiani al test PISA 2012: le risposte a domande *aperte* sbagliate o non fornite sono il 63,8% ([Asquini, 2016]). È un valore in linea con la media OCSE, ma non lo è la percentuale delle risposte omesse a tali domande, che si attesta sul 25,1%, mentre la media OCSE è del 16,9%; in ogni caso, ciò indica che ci sono difficoltà diffuse nel descrivere i procedimenti e nel *giustificare* le proprie affermazioni; anzi, mette in luce un problema più profondo, che si può sintetizzare con le parole di Ferrari in [Ferrari, 2021, pag. 19]:

Cosa può aver capito chi non sa esprimere quello che ha capito?

Un progetto in sintesi

Per queste diverse ragioni, dalla questione di senso alle difficoltà degli studenti, nel 2016 è nato il *Progetto sul curricolo e sulle metodologie didattiche per la matematica della scuola secondaria di secondo grado.* Il lavoro si fonda sull'apporto di diverse componenti: è curato dagli autori di questo volume, con la regia del *Liceo scientifico Leonardo da Vinci* di Trento, prevede la collaborazione di una struttura che fa ricerca educativa, IPRASE, e di un ente competente sulla disciplina, il Dipartimento di matematica dell'*Università* di Trento, ma anche la partecipazione della scuola, ossia dei docenti e dei loro studenti.

Riteniamo che questa *interazione* sia *necessaria* per realizzare una riflessione produttiva sul curricolo – senza coinvolgere questi tre enti non si può costruire un percorso didattico realmente innovativo – e, a posteriori, possiamo dire che è stata *fondamentale* per raggiungere gli obiettivi previsti; insomma, in termini matematici, il confronto è stato necessario e (ampiamente) sufficiente.

Come si comprende dal nome del Progetto, l'*obiettivo* principale è *precisare* un curricolo di matematica, nell'accezione illustrata in [Anzellotti, 1997], per il Liceo scientifico e l'opzione delle scienze applicate; un curricolo che sia coerente con la normativa e che risponda alle reali esigenze degli studenti e dei docenti, in cui si fa matematica *davvero*, nel senso che preciseremo nell'intero volume – e magari lo si fa con gioia e soddisfazione.

Sono propositi impegnativi e per realizzarli abbiamo stabilito alcuni *criteri didattici* a cui ispirare il lavoro. Li ricordiamo ora sinteticamente, aggiungendo magari qualche osservazione rispetto a quanto già illustrato nel volume per il primo biennio, mentre nei primi due capitoli mostreremo come si possono declinare in un percorso per il secondo biennio.

- *Curare la disponibilità a lungo termine di quanto si apprende a scuola.*
  Tenerne conto nella progettazione delle attività è cruciale, e orienta la scelta dei contenuti da discutere in classe, ma anche delle modalità e delle metodologie didattiche con cui farlo. Ne precisa alcuni aspetti Anzellotti in [Anzellotti, 2016]:

  Non si deve quindi essere stupiti o amareggiati, né come studenti né come insegnanti, se all'inizio della terza superiore gli studenti hanno grandi difficoltà con l'Algebra che hanno studiato in prima e in seconda: è normale. Ma si deve agire. Bisogna riprendere le cose studiate, darsi il tempo di farlo, e mantenere su di esse un'attenzione permanente, in modi che saranno necessariamente diversificati per ciascuno studente a seconda della sua specificità. E di nuovo sarà utile ripetere questo lavoro in momenti successivi, in quarta e in quinta e all'inizio dell'università, e a quel punto le conoscenze basilari di Algebra per l'obbligo scolastico, che sono state studiate a 14 e 15 anni, saranno finalmente padroneggiate e sopra ci si potranno solidamente costruire nuovi saperi. Quanto si è detto nel caso dell'Algebra vale per ogni conoscenza. E vale complessivamente per la Scuola e per l'Università. Per costruire un sapere occorrono ripetute occasioni di riprendere le conoscenze apprese, utilizzarle, rielaborarle autonomamente.

- *Sviluppare abilità/competenze matematiche e trasversali.*
  Ad esempio, interpretare figure geometriche e comunicare, nelle diverse accezioni di enunciare, argomentare, dimostrare… Insomma, si tratta di non dare rilevanza solo ai contenuti e alle procedure, di non occuparsi solo del *cosa* ma di considerare anche altri aspetti e in particolare i *perché*, come discusso con considerazioni operative in [Mariotti, 2022].

- *Realizzare un percorso unitario.*
  Ciò significa costruire un percorso che tenga conto dello sviluppo degli apprendimenti nell'*intero* quinquennio, ma che guardi anche al *dopo*, ossia al passaggio scuola-università, e a quanto avviene *prima*, cioè al passaggio scuola secondaria di primo grado-scuola secondaria di secondo grado. In questo orizzonte si intravede con maggior chiarezza cosa è davvero rilevante e, dunque, è questo l'orizzonte in cui si possono fare scelte didattiche efficaci.

- *Adottare un approccio fattivamente laboratoriale.*
  Nel senso non tanto di utilizzare oggetti e strumenti materiali, ma di creare situazioni in cui lo studente è *attivo*; *è l'attivazione dello*

*studente che caratterizza il laboratorio, no*n il luogo o gli strumenti a cui si ricorre ([Anzellotti, 2007]).
In questo senso è laboratorio investigare se una disuguaglianza espressa mediante le lettere è vera, anche se per farlo non servono strumenti speciali ma bastano carta e penna. Ed è laboratorio provare a costruire autonomamente alcuni esempi di oggetti matematici che soddisfano le condizioni richieste da una data definizione oppure alcuni esempi di oggetti matematici che non le soddisfano, prima di esaminare quelli proposti da un testo o dal docente; questa, come attesta ad esempio lo studio di [Dahlberg e Housman, 1997], sembra essere una strategia di apprendimento più efficace rispetto ad altre, quali riformulare il testo o semplicemente memorizzarlo.

- *Costruire un senso della matematica che si fa a scuola.*
  È il criterio più importante e ispira gli altri indicati prima. Realizzarlo richiede diverse attenzioni, tra cui discutere le ragioni per cui si introduce un nuovo oggetto matematico, investigarlo "mettendoci le mani", formalizzare solo in seguito, quando diventa un'esigenza degli *studenti* per comunicare in modo univoco e conciso, ma anche introdurre solo i termini, i simboli e i risultati essenziali.
  In sostanza, affinché gli studenti apprendano davvero *non* basta *raccontare* loro ciò che devono sapere. Lo dice chiaramente Bruner in [Bruner, 2001, pag. 68, 69]:

  Questa visione presume che la mente di chi apprende sia una tabula rasa. […] Più importante ancora in questa concezione è l'assunto che la mente del bambino sia passiva, sia un ricettacolo che aspetta di essere riempito. L'interpretazione attiva, la ricostruzione, non rientrano in questo quadro. […] E' totalmente a senso unico.

  E *non* basta nemmeno *fare pratica*, se con questo si intende limitarsi a riprodurre la procedura che mostra il docente, come si legge ancora in [Bruner, 2001, pag. 67]:

  […] dimostrare semplicemente «come si fa» e offrire la possibilità di fare pratica non è sufficiente.
  Gli studi condotti sulla perizia hanno dimostrato che imparare ad eseguire qualcosa con abilità non porta alla stessa combinazione di maestria e flessibilità che si ottiene attraverso un apprendimento che unisce alla pratica la spiegazione concettuale – un pianista veramente bravo non deve avere solo delle mani agili, ma deve anche conoscere la teoria dell'armonia, il solfeggio, la struttura melodica.

Questo è, in definitiva, il quadro in cui si collocano le scelte didattiche che abbiamo effettuato anche per il secondo biennio, come avremo modo di illustrare nel volume. Ad esso si dovrebbe guardare da diverse prospettive, considerando cioè, oltre agli aspetti cognitivi, anche i fattori *metacognitivi*, le *convinzioni* che lo studente ha sulla matematica e su di sé, e i suoi *atteggiamenti*; ce ne siamo resi conto nella pratica didattica e lo dice da tempo la ricerca.

Per quanto riguarda gli aspetti metacognitivi, la Zan in [Zan, 1995] distingue tra conoscenza delle proprie risorse e auto-regolazione.

> *1. Conoscenza delle proprie risorse cognitive*
> *L'esempio più significativo è quello relativo alla conoscenza dei propri punti forti e/o deboli: sapere di sbagliare facilmente i calcoli, sapere di avere difficoltà a memorizzare, sapere di essere lenti, o disordinati, poco precisi. […]*
> *2. Auto-regolazione*
> *Riferendoci agli esempi precedenti, si può supporre che se un ragazzo sa di sbagliare facilmente i conti, può decidere una strategia di controllo continuo […]; se sa si essere lento, potrà decidere davanti ad un compito quali esercizi è opportuno affrontare; se si rende conto di avere difficoltà a memorizzare, potrà decidere di dedicare più tempo, o strategie opportune, nei compiti di memorizzazioni. […]*

Un ruolo altrettanto importante è giocato dalle convinzioni, come dicevamo.

> *"Se moltiplico due numeri il risultato è maggiore di entrambi." […] "Un numero è negativo se e solo se nella sua rappresentazione simbolica compare esplicitamente il segno". […] Si può riconoscere che nella formazione delle convinzioni esaminate ha una notevole responsabilità il tipo di insegnamento ricevuto. Ma ogni studente, ad ogni livello di scuola, su ogni argomento, possiede e sviluppa convinzioni proprie che l'insegnante difficilmente può immaginare.*
> *Anche convinzioni generali sulla matematica sono spesso implicite. […] le convinzioni generali giocano un ruolo determinante nella utilizzazione delle risorse cognitive e ancora prima sulla decisione di utilizzarle. Esempi di convinzioni di questo tipo molto diffuse (anche tra adulti) sono:*
> - *Solo pochi fortunati possono riuscire in matematica. E quindi: l'impegno in matematica conta fino ad un certo punto.*
> - *Le regole matematiche […] si devono imparare ma non si possono (o devono) capire.*
> - *Per fare gli esercizi di matematica non serve studiare la teoria. […]*
> - *Un problema di matematica o lo capisci subito o non lo capisci più. […]*
>
> *Se un soggetto attribuisce la causa del proprio fallimento in matematica a fattori che ritiene di non poter controllare, difficilmente potrà investire le risorse e le energie necessarie per ottenere un miglioramento dei risultati.*

E con questo ci sembra di aver riassunto gli obiettivi e i criteri didattici su cui si fonda il Progetto. Il rischio era che rimanessero solo belle parole e non incidessero davvero nella pratica didattica; insomma, che non arrivassero ai nostri veri interlocutori, gli studenti. Invece si sono tradotti in varie azioni *concrete*: nella progettazione di un possibile percorso di matematica dalla classe prima alla classe quinta, nella costruzione di *materiali* di diverso tipo a supporto delle attività didattiche, nella loro *sperimentazione* in molte classi e nell'intenso confronto con numerosi insegnanti.

In particolare, riflettere sull'*intera* programmazione del quinquennio – non solo su questioni specifiche – e interagire con i docenti in modo *continuo* nell'arco dell'intero anno scolastico – non solo in incontri episodici – sono le condizioni che riteniamo indispensabili per realizzare percorsi efficaci in classe, e sono pure gli aspetti che, assieme alla collaborazione con l'Università ed IPRASE, caratterizzano il Progetto e lo rendono, per certi versi, unico.

Cosa c'è nel volume

Il testo si può suddividere in due parti. Nella prima, costituita dal capitolo 1 e dal capitolo 2, descriveremo e giustificheremo un possibile *percorso* di matematica per il secondo biennio del Liceo scientifico e per l'opzione delle scienze applicate, indicando di volta in volta i materiali specifici che abbiamo realizzato per gli studenti. Si tratta della naturale prosecuzione del percorso relativo al primo biennio, e anch'esso va esaminato con due attenzioni: è solo *una* proposta tra altre ragionevoli, e va adattato al contesto della classe e al proprio modo di intendere l'insegnamento e l'apprendimento; è pensato per il Liceo scientifico, ma si può adottare almeno in parte anche negli *altri licei* e negli *Istituti tecnici*, modificandolo opportunamente in base alle caratteristiche peculiari di ciascun indirizzo di studio e al monte ore previsto per la disciplina.

In entrambi i capitoli considereremo anche le indicazioni della normativa, le acquisizioni della ricerca in didattica della matematica e quanto si trova nei libri di testo; esamineremo dunque molti aspetti e per questo abbiamo pensato di aggiungere una sintesi della proposta, riportando in uno schema i contenuti che a nostro avviso vanno affrontati, le modalità didattiche con cui farlo e un'indicazione di massima dei tempi che può richiedere ogni segmento del percorso.

Nella seconda parte del volume, ossia nel capitolo 3, mostreremo invece alcuni esempi dei *materiali* che abbiamo costruito in modo da fornire un'idea più precisa di come si possono declinare le scelte didattiche illustrate nei capitoli precedenti: si tratta dei testi delle verifiche sommative assegnate ad una nostra classe nell'arco del secondo biennio e dei materiali relativi a due segmenti significativi del percorso, la derivata per la classe terza e le funzioni trigonometriche per la classe quarta. Essi, assieme a tutti gli altri realizzati per gli studenti, sono disponibili sul *sito* nel dominio dell'Università di Trento che già ospitava il lavoro sul primo biennio[2], e si possono scaricare liberamente.

Ancora uno sguardo ai materiali

Le tipologie in cui sono suddivisi i materiali sono ancora quelle stabilite nel percorso relativo al primo biennio e hanno dunque le caratteristiche che ricordiamo attraverso le parole utilizzate nel volume precedente:

- *Tracce di attività e file GeoGebra o fogli di calcolo mediante i quali alcune di esse sono realizzate. Le indicazioni e i suggerimenti proposti possono essere presentati agli studenti anche gradualmente, in modo da non limitare la loro libertà di esplorare e per lasciare più spazio al confronto tra loro e alla discussione collettiva*

- *Fogli di attività costituiti da esercizi e semplici problemi per investigare aspetti specifici oppure per consolidarne altri. Sono pensati per essere svolti per lo più in modo autonomo dai ragazzi, individualmente oppure in piccoli gruppi; poi è bene discutere con loro gli aspetti più significativi*

- *Dispense su argomenti importanti e che di solito sono affrontati in modo diverso nei libri di testo. Si possono assegnare dopo la lezione come riferimento per lo studio oppure si possono commentare direttamente in classe mediante una discussione collettiva. Tuttavia alcune si prestano ad essere esaminate prima individualmente, in modo da sviluppare l'abilità di imparare cose nuove a partire da ciò che si sa. Precisiamo che questi materiali sono una sintesi; perciò in classe è bene prevedere più passi di quelli indicati nel testo e coinvolgere attivamente gli studenti nella discussione*

- *Testi di verifiche assegnate nelle nostre classi; sono utili anche per l'autovalutazione o per il consolidamento*

- *Letture o video che integrano i materiali che abbiamo costruito nell'ambito del Progetto.*

---

2 https://sites.google.com/unitn.it/currmatsssg

Vogliamo però aggiungere alcune precisazioni che possono aiutare a comprendere meglio il ruolo e il significato delle varie tipologie.

Le *tracce di attività*, a volte, sono articolate in più sotto-domande o riportano suggerimenti, ma ciò non significa che questi vadano sempre presentati agli studenti, almeno non tutti e non all'inizio del lavoro. Infatti, di norma è meglio lasciare che i ragazzi esplorino *liberamente* la questione, avanzino congetture, argomentino prima in piccoli gruppi e poi collettivamente, come sostiene anche la ricerca, ad esempio [Mariotti, 2022, cap. 5]. Piuttosto, le indicazioni che compaiono nel testo sono utili al docente per formarsi un'idea più precisa di come si può organizzare l'attività e di come si può sviluppare la discussione, pur rispettando i tempi di apprendimento degli studenti e valorizzando le loro intuizioni.

Lo stesso si può dire per i *fogli di attività,* anche se in questo caso le indicazioni, che sono comunque poche, possono costituire un utile riferimento per i ragazzi quando il materiale è impiegato per il lavoro a casa.

Osserviamo, inoltre, che nel percorso relativo al secondo biennio alcune *dispense* sono *integrate* con file GeoGebra, che servono per prendere confidenza con i nuovi oggetti matematici introdotti e per facilitare la costruzione di una propria immagine; possono essere visualizzati al proiettore in classe, ma è bene siano anche utilizzati individualmente dagli studenti.

E il libro di testo? Ci siamo accorti che alcuni blocchi dei materiali realizzati possono rimpiazzare *qualche* parte dei manuali in adozione nelle scuole, ad esempio quella sui limiti di funzioni. Tuttavia riteniamo che, almeno per alcuni argomenti, il libro di testo sia ancora uno strumento fondamentale per gli studenti, che dovrebbero imparare ad utilizzarlo per trovare risposte alle proprie domande, senza dipendere unicamente dalla (ri)spiegazione dell'insegnante e, nel contempo, confrontarsi con diverse modalità di esposizione. Piuttosto dovremmo discutere insieme a loro come utilizzarlo in modo critico, evidenziare eventuali analogie e differenze con la nostra impostazione chiarendone le ragioni, e assegnare ogni tanto alcune pagine da approfondire autonomamente.

La parola a docenti e studenti

La condivisione e la sperimentazione del percorso e dei materiali sono elementi costitutivi del Progetto; pertanto è utile guardare alla proposta attraverso le parole dei docenti che l'hanno declinata in classe, naturalmente ciascuno secondo la propria sensibilità didattica, e attraverso quelle degli studenti che hanno vissuto l'esperienza. Iniziamo dai docenti.

Trovo che il percorso "a spirale", che prevede di rivedere e ampliare ogni

anno determinati argomenti, sia stato molto efficace per una comprensione più profonda dei concetti base, soprattutto per i ragazzi più fragili. In particolare ho apprezzato moltissimo la scelta di anticipare il concetto di derivata alla classe terza, per poi rivederlo e ampliarlo gli anni successivi. Questo ha permesso utili intersezioni con il programma di fisica, e interessanti modellizzazioni di situazioni reali, oltre che un'effettiva, profonda e duratura comprensione da parte degli studenti.
Infine, trovo che la continua revisione, condivisione, confronto, con una comunità sempre più numerosa di colleghi sia stato un utile strumento di confronto, stimolo al perfezionamento, prova della validità della proposta (Alessandra).

Introduzione della derivata in terza: non ci sono stati problemi, direi scorrevole, chiaro. Qualche genitore ha potuto trovare qualche scusa per dire che tenevo argomenti difficili in terza e che "tutti sanno si svolgono più avanti"... il che non era un problema sinceramente se non che mi toglievano, così dicendo e non ascoltando, la fiducia dei figli. Osservando i ragazzi direi che per una buona parte di loro non ci sono stati problemi dal punto di vista della comprensione. Importantissimo: facilissima la ripresa dell'argomento in quarta, riconosciuto anche dai ragazzi. I ragazzi mi hanno detto di essere in difficoltà nella ricerca degli esercizi per allenarsi alle verifiche (Gloria).

Il percorso per il secondo biennio è ovviamente caratterizzato in coerenza e in continuità con quanto fatto nel primo biennio: le basi costruite nei primi due anni vengono consolidate e usate per esplorare nuovi contesti.
È possibile comunque proporre il percorso del secondo biennio anche alle classi che non hanno seguito il primo biennio, recuperando quando opportuno i fondamentali (ad es. riprendere all'inizio della classe terza la lettura di grafici di funzione, costruzione delle funzioni base e delle trasformazioni di grafici, per interpretare graficamente la risoluzione di equazioni e disequazioni).
Approfondimento e formalizzazione sui limiti avviene solamente in un secondo momento (nella classe quarta), quando lo studente dovrebbe ormai disporre di una certa familiarità con i significati e possiede forse un'adeguata maturità per procedere alla loro formalizzazione più rigorosa, che magari egli percepisce a questo punto anche come una propria necessità (Michele).

Grazie alle indicazioni e ai consigli che sono emersi durante il corso ho trovato il coraggio di proporre in classe un percorso diverso rispetto a quello classico, più funzionale e più ragionato, con la tranquillità di avere alle spalle un gruppo di supporto.
È *stato molto interessante il lavoro che ho portato avanti sulla proba-*

bilità e sulla geometria solida con la creazione ex novo di esercizi che potessero stimolare la curiosità degli studenti e fossero significativi dal punto di vista matematico. Mi sono misurata con la difficoltà di scrivere un testo chiaro e senza ambiguità, con la necessità di ottenere risultati non troppo stravaganti e allo stesso tempo non troppo semplici e con il desiderio di pensare a delle situazioni reali in cui poter applicare i nuovi concetti. È stato un lavoro dispendioso in termini di tempo ed impegno, ma ne è valsa la pena perché ho potuto costruire una piccola collezione di esercizi che potrò proporre agli studenti nei prossimi anni.
*Le verifiche proposte dai colleghi mi sono servite come utile spunto per esercizi in classe e punto di riferimento per calibrare meglio il mio lavoro (*Michela*).*

*Il percorso del secondo biennio stravolge l'ordine con cui solitamente venivano affrontati alcuni argomenti, con l'obiettivo di far ottenere agli studenti delle basi solide in vista degli esami di maturità e del loro futuro. La solidità del percorso è data anche dal fatto che esso consente di mettere in gioco gli studenti, attraverso numerose attività su carta o attraverso l'utilizzo di software come GeoGebra. Un'altra arma assolutamente vincente del percorso sono i fogli di esercizi ben costruiti che consentono agli studenti di comprendere al meglio l'argomento su cui si basano ed eventualmente approfondirlo. Insomma si tratta di un percorso che può regalare parecchia esperienza, sia a chi si trova nel mondo dell'insegnamento da parecchio tempo, sia a chi si trova alle prime armi (*Marco*).*

Circa cinque anni fa, a seguito del mio trasferimento al "Da Vinci", ho deciso di modificare la struttura della programmazione didattica seguendo il percorso proposto dai proff. Cappello e Innocenti.
Il primo anno la "conversione" non è stata semplice anche se sono partita con un'unica classe terza decisamente ricettiva ed ho ricevuto moltissimo sostegno durante tutto il percorso. Il cambiamento di mentalità, come tutti ben sappiamo, non è semplice perché vuol dire dover abbandonare o modificare dei percorsi didattici conosciuti, testati e quindi rassicuranti. Alla fine dell'anno le ricadute sulla classe mi hanno portata a formulare delle riflessioni con i miei studenti sui pro e contro del percorso e l'unico aspetto negativo emerso riguardava la mancanza di un vero e proprio libro di testo. Per tutti gli altri aspetti, gli studenti hanno espresso soddisfazione nel vedersi capaci di affrontare, seppur in maniera introduttiva, il calcolo differenziale.
*Per ovviare al problema del libro di testo, negli anni successivi ho fornito alle classi una piccola dispensa cartacea con la raccolta delle schede fondamentali per introdurre il percorso sulle derivate (*Luisella*).*

La matematica che ho raccontato ai ragazzi e che con loro ho sperimen-

tato ed esperito si è fondata sulla ricerca di senso. Le attività proposte e gli esercizi mai banali hanno permesso la discussione, il lavoro in piccoli gruppi e la rielaborazione collettiva. L'anticipazione di alcuni concetti di analisi già nel corso della classe terza ha permesso di arrivare al quinto anno con più tranquillità e sicurezza. Questi sono alcuni aspetti che, a mio parere, rendono il progetto un punto di riferimento per chi ha a cuore una didattica che mette veramente al centro lo studente e la sua crescita personale (Roberta).

Il percorso progettuale sul curricolo individua e promuove un nucleo fondante per costruire competenze matematiche stabili di riferimento in un percorso di scuola secondaria di secondo grado e come fondamento di studi successivi (Paolo).

E gli studenti cosa ne pensano?

Personalmente faccio molta più fatica a capire i concetti, ma una volta capiti non li dimentico più. Un semplice esempio è la definizione di pendenza, che ho imparato essere "alzata fratto pedata", un metodo simpatico per ricordarselo ma che sicuramente dà i suoi risultati. Facciamo molti più laboratori, dove l'obiettivo è quello di capire in profondità l'argomento e collegarlo a ciò che ci circonda. Non nascondo che mi trovo ancora in difficoltà ad applicare i concetti su nuovi esercizi, ma sicuramente non temo più la materia come una volta (Carla).

Mi sono trovata molto bene con questo metodo e da quando la matematica non si basa più sull'imparare formule a memoria che al 99% si dimenticano dopo poco, risolvere problemi e ragionare sul procedimento da seguire è diventato quasi un gioco, una piccola sfida contro me stessa che mi fa piacere la materia (Anna).

Partire da esperienze di vita reale aiuta ad immedesimarsi nel problema quindi a trovare prima la soluzione. Imparare la formula subito dopo aver ragionato collettivamente sul problema è utile a chiarire le idee, in particolare trovo che mettersi in gioco con i problemi dei fogli sia più efficace rispetto ai classici quesiti da libro perché più concreti (Sofia).

Durante il mio percorso scolastico, il corso di matematica (oltre alla materia in sé) mi ha insegnato quanto sia rilevante saper comunicare ed argomentare precisamente le mie affermazioni. Ho capito l'importanza del saper argomentare - "giustificare" - in maniera efficace tutto ciò che dicevo o scrivevo in classe, che fossero teoremi, particolari passaggi di un esercizio o altro ancora. "Chiedersi il perché delle cose" che stavamo facendo e sapersi rispondere di conseguenza era sicuramente uno dei punti focali dell'insegnamento. D'altronde ho potuto constatare negli *anni che tutto questo non è importante solo in ambito scientifico-matematico, ma nella vita in generale. Un prodotto vincente è un prodotto ben comunicato. Se si comunicano e argomentano le proprie idee con i termini sbagliati poi, si rischia che non siano comprese da tutti. Ancora peggio, vendere senza adoperare le parole adatte al contesto tende a farci perdere di credibilità. Bisogna essere disposti ad aprire la mente ed entrare in quest'ottica che sì, può sembrare difficile e molto impegnativa inizialmente (e lo è, non c'è da nasconderlo!), ma in realtà è davvero la cosa che sta alla base, quella che può darti un valore in più* (Camilla).

Ritengo che il metodo utilizzato sia stato molto utile e che aiuti a comprendere meglio la matematica mostrando i meccanismi che stanno dietro alle formule, rendendo più semplice lo studio, e aiutando nel ripasso e l'approfondimento di argomenti già visti anche a distanza di anni. Ho trovato inoltre interessante questo metodo perché segue un filo logico, quindi gli argomenti già trattati non vengono accantonati, ma sono necessari per affrontare gli argomenti successivi (Simone).

Quando si inizia un nuovo argomento è molto più soddisfacente arrivare alla spiegazione della teoria ricavandola dallo svolgimento di un esercizio piuttosto che ricevere le conoscenze dal professore per poi applicarle. Innanzitutto perché si capisce subito come si mette in pratica quello di nuovo che si ha imparato ma anche perché si impara ad affrontare una difficoltà e a cercare una via per uscirne (Elisa).

Ringraziamenti

Grazie agli studenti che in questi anni hanno condiviso con noi molte ore in classe e nella rielaborazione individuale: sempre abbiamo pensato a fare in modo che il vostro tempo, quello dedicato alla matematica, fosse ben speso; e insieme abbiamo imparato.

Grazie ai docenti che abbiamo incontrato e con cui ci siamo confrontati intensamente: avete contribuito a farci comprendere più a fondo le esigenze dei ragazzi e attraverso di voi siamo entrati in molte aule. Il libro e i materiali risentono dell'apporto di ciascuno di voi!

Senza Gabriele Anzellotti questo volume e l'intera esperienza non ci sarebbero; ed è solo una parte di quanto ha fatto per la Scuola in questi anni, visto che ha creato le condizioni affinché i docenti potessero ripensare il proprio modo di intendere l'insegnamento e l'apprendimento, anche attraverso parole e modalità nuove. Il Dipartimento di matematica dell'Università di Trento ha sempre appoggiato il Progetto e di recente lo ha fatto con coinvolgimento la direttrice Ana Alonso. In particolare, molte delle idee sottese al lavoro sono frutto del confronto

promosso da tempo dal Laboratorio DiCoMat e dalla sua coordinatrice Elisabetta Ossanna, che ha contribuito ad arricchire la nostra professionalità e quella di molti insegnanti; ma è stato determinante anche l'apporto di diversi docenti universitari che collaborano con il Laboratorio: Stefano Bonaccorsi – con cui abbiamo discusso l'intero percorso di probabilità dalla classe prima alla classe quinta e, nel farlo, abbiamo imparato molto altro –, Roberto Pignatelli – un riferimento per la geometria –, Silvano Delladio – che da trent'anni ha un ruolo significativo nella nostra formazione.

Le Dirigenti scolastiche del Liceo Leonardo da Vinci di Trento, Valentina Zanolla e Tiziana Rossi, hanno avuto e hanno un ruolo fondamentale per l'attuazione e il rinnovo del Progetto, ne hanno scorto le potenzialità e si sono assunte la responsabilità di sostenerlo.

IPRASE permette la diffusione dell'esperienza attraverso il proprio portale, la stampa dei volumi, ma soprattutto attraverso le persone che rendono possibile tutto questo: il direttore Luciano Covi, Ilaria Azzolini ed Anita Erspamer, ormai indispensabile.

Francesca Giacomelli e Ester Dalvit hanno contribuito a realizzare l'immagine in copertina, riuscendo a dare concretezza alla nostra idea e ad illustrarla in modo efficace; Camilla Osler ha progettato la quarta di copertina.

Bibliografia e sitografia dell'Introduzione

[Anzellotti, 1997] Anzellotti, G. (1997). I nuovi temi e la progettazione dei curricoli. In *I temi 'nuovi' nei programmi di matematica e il loro inserimento nel curriculum.* Quaderni MPI-UMI, 26/2, 92-110.
https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2013/10/26_2matem.pdf

[Anzellotti, 2007] Anzellotti, G. (2007). Il laboratorio è utile per fare e imparare una matematica che significhi qualcosa per noi. *Notiziario UMI*. Dicembre, 48-60.

[Anzellotti, 2008] Anzellotti, G. (2008). La questione 'matematica' nella scuola italiana. *RIVISTA DELL'ISTRUZIONE*, 24 (5), 77-84.

[Anzellotti, 2016] Anzellotti, G. (2016). Strategie e strumento per progettare, conquistare, mantenere un sapere matematico consapevole e adeguato ai propri fini. In L. Guasti (a cura di), *Costruire un nuovo curricolo: saggi in onore di Ennio Draghicchio*, 151-159. Trento: IPRASE.
https://www.iprase.tn.it/documents/20178/264352/Costruire+un+nuovo+curricolo/ee3ef6fe-07f7-45d7-a7fb-d6ea42a19a4d

[Asquini, 2016] Asquini, G. (2016). L'uso delle domande aperte per la verifica di competenze di matematica. Suggestioni da PISA 2012. *Form@re, 16 (1), 55-69.*
https://oaj.fupress.net/index.php/formare/article/view/3581/3581

[Bolondi e D'Amore, 2010] Bolondi, G., D'Amore, B. (2010). *La matematica* *non serve a nulla. Provocazioni e risposte per capirne di più.* Bologna: Compositori.

[Bruner, 2001] Bruner, J. (2001). *La cultura dell'educazione.* Milano: Feltrinelli.

Edizione originale: 1996.

[Cappello e Innocenti, 2018] Cappello, L., Innocenti, S. (2018). Progetto sul curricolo e sulle metodologie per la matematica nella scuola secondaria di secondo grado*. Newsletter IPRASE,* gennaio 2018.

https://urly.it/3f3zf

[Cappello e Innocenti, 2022]. Cappello, L., Innocenti, S. (2022). *Facciamo la matematica che conta. Il curricolo di matematica per il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado: dalle scelte didattiche alla declinazione in classe.* Trento: IPRASE.

https://www.iprase.tn.it/documents/20178/7944610/Facciamo+la+matematica+che+conta.pdf/a6ee4e17-ba6d-4204-b7d7-f3eed85e73e8

[Dahlberg e Housman, 1997]. Dahlberg, R.P., Housman, D.L. (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics*. 33, 283-299.

[Ferrari, 2021] Ferrari, P.L. (2021). *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe.* UTET.

[INVALSI, 2019] INVALSI (2019). *Rapporto prove Invalsi 2019.*

https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2019/rapporto_prove_invalsi_2019.pdf

[Mariotti, 2022] Mariotti, M.A. (2022). *Argomentare e dimostrare come problema didattico.* UTET.

[MIUR, 2010] MIUR (2010*). Indicazioni nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento per i licei.*

https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

[MIUR, 2010a] MIUR (2010*). Istituti Tecnici. Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento.*

https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_tecnici/INDIC/_LINEE_GUIDA_TECNICI_.pdf

[MIUR, 2010b] MIUR (2010*). Istituti Professionali. Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento.*

https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_professionali/linee_guida/_LINEE%20GUIDA%20ISTITUTI%20%20PROFESSIONALI_.pdf

[PAT, 2013] *PAT (2013). Linee guida della Provincia autonoma di Trento per il secondo ciclo di istruzione.*

https://www.vivoscuola.it/Schede-informative/Piani-di-studio-SECONDO-CICLO/Materiali-piani-di-studio-SECONDO-CICLO

[Silver, 2009] Silver, E. (2009). Cross-national comparisons of mathematics curriculum materials: what might we learn? *EZDM Mathematics Education*. 41, 827–832

[Zan, 1995] Zan, R. (1995). L'approccio metacognitivo. *Le Scienze e il loro insegnamento*. 4/5, 96-99.

1. Un percorso per la classe terza: le scelte didattiche

Stabiliti i criteri indicati nell'Introduzione, quali scelte didattiche compiere e come declinarle poi in un percorso per la scuola secondaria di secondo grado?

Ne abbiamo già discusso per il primo biennio in [Cappello e Innocenti, 2022], ed è quanto intendiamo illustrare in questo capitolo per la classe terza del Liceo scientifico e dell'opzione delle scienze applicate. In sostanza descriveremo e giustificheremo un possibile percorso annuale, basandoci sulla nostra esperienza e sulle *sperimentazioni* condotte in numerose classi, ma anche sulle acquisizioni della *ricerca* e sulla *normativa*; inoltre ci confronteremo con quanto propongono i libri di testo e, passo per passo, indicheremo i materiali che abbiamo realizzato per lo studente a supporto delle attività didattiche; la loro struttura e il modo di impiegarli in classe sono descritti nell'Introduzione del volume.

Con un'attenzione: più che al *cosa* ci interesseremo al *come*, altrimenti insegnare e apprendere si riduce a passare in rassegna una sequenza di contenuti e strumenti, senza che gli studenti possano *vederli* davvero, trovarne un *senso*, farli *propri* e disporne a *lungo*. Si tratta dunque di mettere in gioco la matematica e mettersi in gioco, come abbiamo osservato in varie occasioni anche nel volume precedente.

Lo faremo, in particolare, nel secondo paragrafo, che è il cuore del capitolo. Nel paragrafo iniziale invece illustreremo le scelte didattiche *generali* che sono alla base del percorso, mentre nel terzo proporremo uno *schema* della nostra proposta, uno sguardo d'insieme, che riporta sinteticamente contenuti e modalità nonché un'indicazione di massima dei tempi. È un ulteriore strumento a cui il docente può fare riferimento per progettare il *proprio* percorso, poiché per compiere scelte efficaci e profonde serve considerare *complessivamente* l'intera programmazione: spesso i singoli aspetti non sono significativi in sé, ma lo diventano o meno in relazione a quanto si intende realizzare nell'arco del quinquennio o, almeno, in un anno scolastico.

1.1 Alcune scelte didattiche generali

Per iniziare, c'è da *ripensare* la programmazione della *geometria analitica*, tradizionalmente centrata sullo studio delle sezioni coniche, proposte in ogni dettaglio; ad esempio, il Piano nazionale di informatica [MPI, 1996] entrava nello specifico e prevedeva per la classe terza:

> *Contenuti*
> *Tema n. 1 – Geometria*
> *1.a Circonferenza, ellisse, parabola, iperbole nel piano cartesiano.*

Una revisione ci sembra necessaria, se non altro per fare posto ai nuovi temi previsti dalle Indicazioni nazionali [MIUR, 2010], ma soprattutto per *sfrondare* gli aspetti che non sono didatticamente significativi, sia nel senso di non proporre esercizi inutili – come ad esempio determinare l'equazione della parabola dati il fuoco ed un suo punto mediante un sistema – sia nel senso di non analizzare quattro curve quando per apprendere il *metodo* della geometria analitica basta considerarne una.

Alcuni aspetti di base, come abbiamo illustrato nel volume relativo al primo biennio, vanno esaminati già nelle classi prima e seconda: stiamo parlando soprattutto del metodo delle coordinate e della retta nel piano cartesiano. Nella classe terza la nostra idea è di seguire più in profondità rispetto al primo biennio l'approccio introdotto da Cartesio, che nel classico testo [Klein, 1991, pag. 359 e 376] è sintetizzato in questo modo:

> *Egli vedeva chiaramente la potenza dell'algebra e la sua superiorità rispetto ai metodi greci nel fornire una metodologia più estesa. Sottolineava anche la generalità dell'algebra e il suo valore nel rendere meccanici i ragionamenti e nel rendere minimo il lavoro necessario per risolvere i problemi.*
>
> *[…] Viceversa, interpretando geometricamente gli enunciati algebrici si poteva conseguire una comprensione intuitiva dei loro significati come pure suggerimenti per la deduzione di nuove conclusioni.*

Si tratta dunque di sfruttare da una parte la *potenza* e la generalità dell'algebra, dall'altra l'*espressività* e l'immediatezza della geometria. Mediante questo approccio proponiamo di riprendere e approfondire l'idea di equazione di una curva, esaminare a fondo la circonferenza, fare ancora qualche cenno alla parabola, e poi esaminare una delle altre coniche – preferiamo l'ellisse –, mettendo in luce la costruzione dell'equazione e le proprietà focali più che questioni legate al calcolo.

Rimanendo nell'ambito della geometria, è bene *completare* la trigonometria del *triangolo*, estendendo al *generico* triangolo l'esame iniziato nella classe seconda sui triangoli rettangoli, con gli stessi obiettivi, ossia interpretare figure, visualizzare nello spazio… come indicato in [Cappello e Innocenti, 2022, pag. 97]. In questo modo, tra l'altro, si fa un po' di geometria anche senza le coordinate.

Invece lo studio delle funzioni trigonometriche non ci sembra così urgente, a meno che non serva per lo studio della fisica, e può essere affrontato all'inizio del quarto anno.

La scelta che consideriamo più innovativa è *introdurre* la *derivata* già nella classe terza. Abbiamo provato nel corso degli anni ad anticiparne qualche aspetto all'inizio del secondo biennio e ci siamo via via convinti che ha senso dedicare ampio spazio al tema fin da subito, per varie ragioni.

Una è di tipo pratico, visto che questo oggetto matematico è *utile* per affrontare alcune questioni che tipicamente si considerano all'inizio del secondo biennio, quali formalizzare velocità e accelerazione in fisica e determinare l'equazione della retta tangente alla parabola; infatti il metodo "discriminante nullo", che tradizionalmente si utilizza nella classe terza, è poco efficiente e, anzi, può essere fonte di misconcetti: la retta tangente non è la retta che interseca la curva in un solo punto. Lo strumento inoltre permette di risolvere questioni altrettanto importanti, in particolare i problemi di ottimizzazione, che abbiamo proposto di esaminare fin dalla classe seconda mediante le funzioni polinomiali di secondo grado oppure attraverso considerazioni geometriche.

Un'altra ragione è che la derivata è una nozione *fondamentale* in Analisi, forse la più importante ([Villani et al., 2012, pag. 139]), e serve tempo affinché gli studenti la interiorizzino e la facciano propria. Tuttavia, si può obiettare, i ragazzi non dispongono ancora della nozione di limite… dunque, come possono comprendere la derivata, che proprio come limite si definisce? Una risposta viene dalla storia del pensiero matematico: la derivata è stata impiegata almeno due secoli prima che fosse comparsa una definizione rigorosa di limite, visto che la formulazione "epsilon-delta", attualmente accettata dalla comunità dei matematici, è stata proposta da Heine solo nel 1872. Pertanto, perché non seguire questo ordine anche al liceo?

Stabilito ciò, si tratta di scegliere quali aspetti considerare. Noi riteniamo che si debbano esaminare alcune questioni elementari di calcolo ma che la priorità sia curare i *significati,* in modo che gli studenti siano poi in grado di interpretare mediante la derivata situazioni di vario tipo, anche in altre discipline; in particolare, ciò significa riconoscere quando nel manuale di fisica si sta parlando del tasso di variazione di una grandezza e riuscire ad esprimere quello istantaneo mediante la derivata, anche se non è esplicitato nel testo. In questa prospettiva, è meglio riservare alle classi successive il calcolo della derivata di funzioni composte, l'esame della derivabilità e il teorema di Lagrange, anche se di solito questi contenuti vengono collocati dai libri in adozione in un unico modulo.

Non è tutto. Ci siamo accorti che proporre un percorso di questo tipo conduce a fare algebra in modo significativo: ad esempio, si risolvono semplici equazioni, anche irrazionali, si studia il segno di funzioni razionali e si lavora con i parametri; inoltre lo si fa in vista di un *obiettivo* ben preciso e in un contesto *motivante* per gli studenti. Insomma, per consolidare le abilità algebriche si può sfruttare il tema della derivata e non serve ricorrere al tradizionale ripasso di inizio anno scolastico, che del resto non riteniamo nemmeno efficace, come chiarito in [Cappello e Innocenti, 2022, pag. 150].

Per restare nell'ambito delle funzioni, proponiamo di esaminare *a fondo* la *funzione esponenziale.* Ciò significa, innanzitutto, comprendere *come è fatta*, ricorrendo alla rappresentazione mediante la tabella introdotta ancora nella classe prima ([Cappello e Innocenti, 2022, pag. 39]) e leggendo su di essa la proprietà caratterizzante della funzione, ossia la *regola di spostamento* che fa corrispondere a somme sulla riga inferiore prodotti su quella superiore. Inoltre significa *fare matematica davvero*, ossia occuparsi di aspetti rilevanti della disciplina, quali modelli e stime, non solo di equazioni e disequazioni.

> *Le funzioni basilari di tutta la matematica sono sostanzialmente solo di tre tipi:*
> *- funzioni polinomiali*
> *- funzioni esponenziali*
> *- funzioni trigonometriche.*
> *Più specificamente le funzioni esponenziali intervengono nella modellizzazione dei principali fenomeni di accrescimento o di decadimento, in tutti i settori disciplinari, dalla fisica alla chimica, alla biologia, all'economia...*

È quanto sostengono gli autori in [Anichini et al., 2006, pag. 57], ed è quanto vorremmo avessero chiaro gli studenti; non perché è stato raccontato loro, ma per averlo *sperimentat*o in prima persona, attraverso attività come quelle che illustreremo e per averne discusso con i compagni e con il docente. Eppure i manuali riducono questi aspetti a poche pagine, spesso slegate dal resto del capitolo e magari semplicemente appiccicate sulla versione precedente del testo. Come possiamo richiedere ai ragazzi di attivarsi, se poi proponiamo loro solo equazioni e disequazioni di cui non comprendono il senso e la portata?

Per questo la costruzione e l'esame di semplici modelli di crescita dovrebbe costituire il filo conduttore dell'intero percorso sull'esponenziale.

È già molto, ma si può pensare di completare il percorso del terzo anno dando uno sguardo alla geometria sintetica dello *spazio* oppure agli sviluppi della statistica descrittiva elementare esaminata nel primo biennio.

Ci sono buoni motivi per esaminare il primo tema, ma quello che ci sembra più rilevante è che viviamo in uno spazio tridimensionale; inoltre riflettere su ciò che accade in tre dimensioni permette di comprendere meglio il piano. Diciamo subito che il nostro obiettivo non è tanto calcolare volumi e aree, del resto i ragazzi lo hanno già fatto alla scuola secondaria di primo grado, quanto sviluppare la *visualizzazione spaziale* e l'abilità di *interpretare figure* geometriche. E il valore aggiunto rispetto alla terza media è giustificare *razionalmente* le affermazioni e i risultati a cui prima gli studenti giungevano solo per via intuitiva o sperimentale.

Ma anche rappresentare dati, elaborarli ed analizzarli sono attività significative e importanti per comprendere il *mondo* in cui viviamo. Lo abbiamo già osservato nel percorso relativo al primo biennio ([Cappello e Innocenti, 2022, sez. 2.2.6]), e ora si possono arricchire gli strumenti a disposizione esaminando la correlazione tra due grandezze e un possibile modello del loro legame, la regressione lineare. I calcoli vanno demandati al foglio elettronico; noi preferiamo discutere con gli studenti alcune idee di base, giustificare le definizioni e ricavare le formule, e utilizzarle per analizzare semplici situazioni reali.

Ora, se si dispone di 4 unità orarie a settimana per la disciplina matematica, come stabilisce la normativa per i Licei scientifici, ci sembra difficile riuscire ad affrontare adeguatamente sia questo tema sia la geometria sintetica dello spazio nella classe terza; in tal caso si dovrà valutare quali aspetti discutere tra quelli proposti, considerando anche l'opzione di esaminare uno solo dei due argomenti.

Infine vogliamo fare una precisazione. Molte scelte didattiche che si compiono al terzo anno dipendono dal percorso che la classe ha svolto nel primo biennio. In particolare, se non si è lavorato a fondo con le funzioni e i grafici, non si può pensare di introdurre efficacemente la derivata, e così, prima di affrontare diverse questioni proposte in questo paragrafo è opportuno che gli studenti dispongano degli elementi nodali del nostro percorso relativo alle classi prima e seconda.

1.2 Un percorso

1.2.1 Il meglio della geometria e dell'algebra: la geometria analitica

È un buon punto di partenza per iniziare l'anno scolastico. Infatti la geometria analitica è un tema *meno articolato* rispetto agli altri previsti per la classe terza, permette di *consolidare* vari aspetti dell'algebra e della geometria sintetica affrontati nel primo biennio e, nel contempo, offre la possibilità di introdurre questioni nuove. Per queste ragioni, l'esame della geometria analitica ci sembra più motivante ed efficace del tradizionale "ripasso" che si effettua all'inizio dell'anno scolastico, e in aggiunta consente di collocare quanto si affronta in un contesto *unitario* e in vista di *obiettivi* di ampio respiro; del resto, la manutenzione delle conoscenze e delle abilità non va imposta dall'esterno, ma dovrebbe nascere da un'*esigenza* degli studenti, e non si esaurisce certo nel dare attenzione ai soli contenuti.

Ma quale approccio seguire? Cartesio non sembra avere dubbi e nel *Discorso sul metodo* (1637) scrive:

> *ho pensato che occorreva cercare un altro metodo matematico, un metodo che, tenendo conto dei lati positivi delle tre [geometria, algebra, logica], fosse esente dai loro difetti.*

Seguendo il matematico francese, anche noi proponiamo di sfruttare sia la *potenza* e la generalità dell'algebra sia l'*espressività* e l'immediatezza della geometria; e di passare consapevolmente da uno dei due registri di rappresentazione all'altro, utilizzando le caratteristiche proprie di ciascuno di essi, come raccomanda l'autorevole documento [Accascina et al., 2006, pag. 49].

Questo non sembra essere però il punto di vista adottato dai libri di testo, che spesso danno rilevanza ai soli aspetti algebrici e non valorizzano così le potenzialità didattiche offerte dal tema. Lo precisa Villani in [ICMI, 1995]:

> *La geometria analitica si presuppone presenti modelli geometrici per situazioni geometriche. Ma non appena gli studenti sono introdotti a questi nuovi metodi, essi sono improvvisamente proiettati in un nuovo mondo di simboli e di calcoli nel quale il collegamento fra situazioni geometriche e i loro modelli algebrici viene meno e le interpretazioni geometriche dei calcoli numerici sono spesso trascurate.*

Le idee fondamentali della geometria analitica

Già nel percorso relativo alla classe prima abbiamo discusso gli aspetti di base per operare nel piano cartesiano, integrando fin da subito i due punti di vista – geometrico ed algebrico – e puntando a sviluppare abilità più che a consolidare contenuti specifici ([Cappello e Innocenti, 2022, sezione 2.2.8]). Nella classe successiva abbiamo dato un rapido sguardo ad alcune curve e alle loro equazioni, abbiamo esaminato il caso speciale della retta, fondandola sulla nozione di pendenza ([Cappello e Innocenti, 2022, sezione 2.3.1]), e, cambiando punto di vista, abbiamo analizzato il grafico delle funzioni polinomiali di secondo grado nonché della funzione $\frac{1}{x}$ e dei suoi trasformati mediante semplici traslazioni e simmetrie.

Sono già diversi aspetti, ma ciò che conta è non limitarsi a raccontarli: gli studenti dovrebbero poterli investigare e farne esperienza *diretta,* "mettendoci le mani" attraverso opportune attività.

Nella classe terza ci proponiamo di introdurre nuove curve e di esaminarne più a fondo altre, già note ai ragazzi, ma prima è opportuno prendere confidenza con il "nuovo" *metodo,* come peraltro prevedono gli Obiettivi di apprendimento per il secondo biennio delle Indicazioni nazionali:

> *[…] lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria.*

Concretamente si può esaminare qualche curva nel piano, ad esempio la *lemniscata* di Bernoulli, attraverso questioni elementari, quali l'appartenenza alla curva di punti assegnati, eventuali intersezioni con rette, eventuali simmetrie; questioni che gli studenti possono risolvere contando sugli strumenti di cui già dispongono dal primo biennio. Per formarsi un'idea più precisa della curva e per controllare i risultati, si può ricorrere ad un software di geometria dinamica, tuttavia le immagini prodotte vanno poi *interpretate* criticamente: dalla sola rappresentazione offerta non si può dedurre con certezza, ad esempio, se un punto appartiene o meno alla curva.

Su queste basi si può passare a problemi più articolati, come la duplicazione del cubo mediante la *cissoide*, e ad esaminare situazioni reali, quali il funzionamento dei microfoni a cardioide o la forma delle camme nel motore delle automobili, anche mediante la lettura [Brandi e Salvadori, 2004, sezione 4.2] o attraverso simulazioni disponibili in rete[3]. Sono questioni che, assieme a quelle indicate prima, proponiamo

[3] Il funzionamento delle camme è simulato, ad esempio, ai due indirizzi: https://it.wikipedia.org/wiki/Albero_a_camme#/media/File:Nockenwelle_ani.gif, https://it.wikipedia.org/wiki/Motore#/media/File:4-Stroke-Engine.gif .

nei fogli di attività *1* e *2* oppure nel foglio di attività *1 e 2 compatto*, una versione semplificata, magari più adatta alla classe.

A questo punto gli studenti dovrebbero essere pronti per apprezzare una *sistemazione* generale dell'idea fondamentale della geometria analitica, cioè, fissato un sistema di coordinate cartesiane, c'è una corrispondenza tra curve del piano ed equazioni in due incognite, che si precisa in questo modo: un punto appartiene alla curva se e solo se le sue coordinate sono soluzione dell'equazione.

Ma vale anche la pena approfondire il contesto storico e culturale in cui è nata la geometria analitica, per comprendere come il suo sviluppo, e più in generale quello della matematica, sia fortemente legato alle altre attività umane; il "nuovo metodo" è infatti conseguenza, oltre che dello sviluppo delle *scienze,* del contesto *economico* e *sociale* del diciassettesimo secolo, in particolare delle necessità della navigazione e degli interessi militari. Lo chiarisce la lettura [Alexandrov et al., 2000, da pag. 220 a 224].

Una curva notevole: la circonferenza

Gli strumenti generali sviluppati dovrebbero permettere agli studenti di investigare, consapevolmente e con una certa autonomia, la circonferenza. La curva è trattata in dettaglio nei libri di testo, forse troppo, visto che i manuali spesso si preoccupano di fornire formule specifiche per ogni situazione, dalle coordinate del centro in funzione dei coefficienti dell'equazione alla "formula di sdoppiamento" che riguarda la retta tangente in un suo punto. Ma sono proprio indispensabili? E quali tra esse si dovrebbero memorizzare?

Nessuna, a nostro avviso. Piuttosto lo studente dovrebbe *ricavare volta per volta* ciò che gli serve nella situazione che sta esaminando, e dovrebbe saperlo fare anche dopo la verifica sommativa, fino alla classe quinta e all'università.

Questo è, in sostanza, l'approccio che proponiamo. Vediamo ora come si può declinare per affrontare alcune questioni di base.

- *Costruire l'equazione della circonferenza a partire dalla sua definizione sintetica*, *ossia noti il centro e il raggio.*
  Naturalmente si tratta di ricorrere alla formula della distanza tra due punti e dunque, in ultima analisi, al *teorema di Pitagora*. È bene che lo studente sia consapevole di questo fatto e, di conseguenza, non si riduca a sostituire i valori assegnati in una formula che non sa interpretare.

- *Disegnare la circonferenza data l'equazione.*
  Se l'equazione non è già scritta nella forma $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, la riscriveremo in questo modo utilizzando il *completamento dei quadrati*, che è già stato introdotto nel primo biennio per risolvere le equazioni di secondo grado. Le coordinate del centro e il raggio si possono allora *leggere* direttamente dalla nuova equazione, interpretando il primo membro come il quadrato della distanza del generico punto della curva da un punto fisso. Proprio per la sua espressività, questa è la forma in cui di norma considereremo l'equazione della circonferenza.
  A questo proposito, non possiamo non citare un quesito assegnato alla prova di ingresso ai corsi di laurea in matematica, fisica, informatica e ingegneria dell'informazione dell'Università di Trento, nell'aprile 2016:

  È *data la curva di equazione* $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 3$.
  Sia $P(a, b)$ *il punto di tale curva che ha ordinata b massima, allora b vale…*

  Solo il 42% dei 725 partecipanti ha fornito la risposta corretta! Sembra incredibile, visto che nella scuola secondaria di secondo grado tradizionalmente si riserva molto spazio alla geometria analitica e alle coniche. Come si spiega allora un esito così negativo? Secondo noi, diversi studenti, invece di rispondere deducendo il raggio e le coordinate del centro *direttamente* dall'equazione fornita nel testo, hanno pensato di dover ricorrere ad una qualche formula, che però non ricordavano; non è certo questo che vogliamo come docenti.

- *Determinare l'equazione della circonferenza passante per tre punti.*
  Seguendo l'approccio generale alla geometria analitica proposto da Cartesio, si può ricorrere alle proprietà sintetiche della circonferenza e ricavare il centro come intersezione di due assi del triangolo che ha come vertici i punti dati. Ciò consente di organizzare in passi elementari il procedimento risolutivo e controllare ciascuno di essi sul disegno.
  D'altro canto, saper risolvere sistemi di 3 equazioni in 3 incognite è un'abilità indispensabile, perciò è utile considerare anche l'approccio algebrico alla questione, richiamando le procedure già impiegate nella classe seconda per determinare l'equazione della parabola che passa per tre punti assegnati.

- *Scrivere l'equazione di rette tangenti alla circonferenza*.
  I libri di testo propongono spesso l'approccio che indichiamo con la locuzione "discriminante = 0", e che consiste nello scrivere l'equazione della generica retta per un punto ed imporre che abbia una sola soluzione il sistema formato con l'equazione della circonferen-

za. È una strategia analoga a quella proposta storicamente da Cartesio, ma che è stata presto sostituita da procedimenti più efficaci e generali, come il docente può approfondire in [Giusti, 2007, da pag. 25 a 32].

Per chiarire la nostra posizione sul tema distinguiamo due casi. Se il punto P dal quale si conduce la tangente appartiene alla circonferenza, la questione è irrinunciabile: la retta tangente è la retta per P la cui pendenza è l'opposto del reciproco della pendenza del raggio passante per P. Se invece il punto è esterno, si può ricorrere alla derivata; perciò, in tal caso, il problema si potrà risolvere solo più avanti… ma è davvero così rilevante al liceo?

Ulteriori questioni significative sono quelle in cui sono determinanti gli aspetti geometrici, come scrivere l'equazione della circonferenza, note l'equazione della retta tangente in un suo punto assegnato e l'equazione di una retta su cui si trova il centro. Ma ci sembra importante anche calcolare l'area di sottoinsiemi del piano definiti mediante disequazioni, o ricorrere al software GeoGebra per ricavare l'equazione della circonferenza date opportune condizioni, visto che tale ambiente permette di visualizzare *contemporaneamente* la rappresentazione grafica e quella algebrica, proprio nello spirito della geometria analitica.

Per il consolidamento invece si può fare riferimento al foglio di attività *3* e al libro di testo, pur di scegliere opportunamente cosa proporre ai ragazzi, secondo quanto abbiamo appena osservato. Invece un esempio di verifica sommativa è verifica *1*, che mostreremo nel paragrafo 3.1 assieme a tutte le prove citate nei primi due capitoli.

1.2.2 Uno sguardo alle coniche

Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista sintetico che analitico.

Lo dicono le Indicazioni nazionali negli Obiettivi specifici di apprendimento per il secondo biennio ed è quanto ci proponiamo di fare anche noi.

In realtà, nel percorso abbiamo già esaminato vari aspetti che le riguardano, anche se magari solo dal punto di vista delle funzioni. Infatti, come ricordato nella sezione precedente, già nel primo biennio abbiamo investigato le funzioni polinomiali di secondo grado (in particolare, il grafico e il significato geometrico dei coefficienti, l'ascissa del punto di massimo o minimo) e abbiamo determinato l'equazione della parabola che passa per tre punti e le sue intersezioni con rette. Inoltre abbiamo considerato l'iperbole come grafico della funzione $\frac{1}{x}$ e, più in generale, come grafico di una funzione della forma $a + \frac{1}{x+b}$, dove a, b sono costanti. In aggiunta, abbiamo previsto lo studio della circonferenza proprio all'inizio della classe terza.

Cosa ha senso aggiungere a questo elenco?

Non molto, visto che ormai, grazie allo studio della circonferenza, gli studenti dovrebbero aver preso confidenza con il "nuovo metodo". Ed è proprio questo il punto: non serve che i ragazzi conoscano ogni aspetto di ogni tipo di conica, l'importante è che abbiano compreso a fondo l'approccio caratteristico della geometria analitica, lo sappiano utilizzare consapevolmente in situazioni non troppo articolate, e riescano ad impiegarlo anche più avanti nel percorso. Del resto le Indicazioni nazionali, pur prevedendo tali curve, non nominano esplicitamente alcun tipo di conica.

In definitiva, ci sembra sia sufficiente discutere alcuni aspetti dell'ellisse, soprattutto poiché questa curva è rilevante nella descrizione di fenomeni naturali e poiché generalizza la circonferenza. Al più si può proporre qualche approfondimento sulla parabola, ma studiare l'iperbole nel piano cartesiano aggiungerebbe davvero poco.

Prima in generale

Prima di esaminare le singole curve che abbiamo indicato, è opportuno dare uno sguardo complessivo alle coniche, ad iniziare dalle *situazioni* di varia natura in cui intervengono. Alcune sono proposte nella dispensa *Coniche: motivazioni*: si tratta delle orbite dei satelliti della Terra, del Colosseo di Roma, del Golden Gate Bridge di San Francisco, delle antenne paraboliche e delle volte ellissoidali. Tali situazioni si possono discutere in modo interdisciplinare oppure si possono condensare in domande a cui si risponderà compiutamente solo in seguito, dopo aver introdotto gli strumenti matematici per farlo; ad esempio:

> *Perché la lampadina che si utilizza nei fari delle automobili, pur avendo dimensioni ridotte, riesce ad illuminare la strada?*

Non è tutto. Come avviene per diversi oggetti matematici, è significativo seguire l'evoluzione dello studio delle coniche nella storia: introdotte dai Greci per rispondere a problemi di carattere *speculativo,* ad esempio la duplicazione del cubo[4], queste curve sono state riscoperte nel '600 per modellizzare osservazioni della natura, quali le orbite dei pianeti o il moto dei proiettili. Dunque, pur essendo nate per altri scopi, hanno permesso più avanti di risolvere problemi *pratici* di enorme rile-

---

[4] Risolti, anche se non in senso classico, mediante due parabole o una parabola e un'iperbole.

vanza culturale ed economica. Se ne parla nella lettura *Le coniche nella storia*, che fa riferimento ai due testi [Odifreddi, 2010] e [Pappas, 1995].

Il passo successivo è interpretare le coniche come *sezioni*. Meglio se gli studenti sono condotti per gradi ad investigarle in prima persona, sezionando coni di polistirolo ed esplorando dinamicamente le intersezioni mediante il software GeoGebra 3D, oppure orientando una torcia elettrica verso una parete, come descritto nell'attività *Sezioni* con il file *SezioniConiche.ggb*[5]. Dunque ricorrendo all'*oggetto* e all'*azione,* secondo le modalità precisate dalla Castelnuovo nelle conclusioni del suo contributo [Castelnuovo 1965]:

> È necessario *ricorrere all'oggetto e all'azione se si vuole che l'insegnamento della geometria intuitiva abbia un carattere costruttivo e sia quindi formativo […]. Oggetto e azione che non devono seguire uno schema prestabilito, ma lasciarsi ispirare ogni volta dalle esigenze della classe che l'insegnante avrà la sensibilità di saper cogliere […]. I mezzi pratici per la realizzazione delle esperienze non hanno nessuna importanza: si tratterà di un modello, di un dispositivo, di un'esperienza realizzata con l'aiuto di un materiale o solamente immaginata, delle variazioni di una luce o del mutarsi di un'ombra. Ed è proprio forse questa libertà di ideare e di interpretare, ugualmente alla portata del maestro e dell'allievo, che costituisce una delle caratteristiche del metodo costruttivo.*

Nella nostra attività c'è spazio anche per due approfondimenti. Uno riguarda la relazione che si può riconoscere tra i tre tipi di coniche non degeneri e le figure retoriche ellissi, iperbole e parabola; relazione esaminata in [Odifreddi, 2010, pag. 199]. L'altro approfondimento, invece, è relativo alle sezioni di un cubo e propone agli studenti di confrontare le proprie esplorazioni con un video[6] di Gattegno, datato ma di grande valore didattico, in un lavoro che potrà essere ripreso più avanti nel contesto della geometria dello spazio.

Poi mettiamo a fuoco l'ellisse

Il punto di partenza è caratterizzare l'ellisse come luogo geometrico, e di qui *costruirla* come indicato nell'attività *Costruzione dell'ellisse* con il file *CostruzioneEllisse.ggb*, ossia prima mediante una cordicella – che rappresenta la somma di ciascuna coppia di segmenti condotti da ogni punto della curva ai fuochi; dunque la sua lunghezza è una costante dell'ellisse –, poi con GeoGebra oppure piegando la carta. Naturalmen-

---

[5] Realizzato da Giancarlo Dorigotti e Michele Avancini.

[6] https://www.youtube.com/watch?time_continue=1&v=Rc8X1_1901Q

te gli studenti dovranno giustificare le varie costruzioni e discuterle con i compagni e il docente.

Gli elementi che servono per ricavare l’equazione dell’ellisse ci sono tutti, ma *prima* preferiamo investigare per via *sintetica* le simmetrie della curva e le relazioni tra i parametri semidistanza focale e lunghezza dei semiassi. Precisamente, se si considera uno dei due punti dell’ellisse che appartengono all’asse maggiore, si ricava presto che la somma delle distanze dai fuochi è uguale alla lunghezza dell’asse maggiore; invece, applicando il teorema di Pitagora al triangolo che ha come vertici il centro dell’ellisse, un fuoco e uno dei due punti della curva che si trovano sull’asse minore, si ottiene un’uguaglianza che lega la semidistanza focale alle lunghezze dei due semiassi.

Come si vede, si tratta ancora una volta di “mettere le mani” sulla curva invece di limitarsi a manipolare algebricamente la sua equazione, come propongono spesso i libri di testo; si tratta di comprendere le ragioni e controllare i procedimenti, senza fermarsi ai risultati; si tratta di andare in profondità e di farlo con passione. Tuttavia non vorremmo essere fraintesi: interpretare l’equazione di una curva è una competenza importante e va sviluppata; stiamo solo dicendo che questo non deve essere l’*unico* approccio di cui dispongono gli studenti per ricavare informazioni su tale oggetto matematico.

Precisato ciò, costruire l’equazione dell’ellisse in situazioni elementari è formativo ed è una significativa applicazione degli strumenti generali introdotti nel blocco relativo alle curve nel piano cartesiano e approfonditi con lo studio della circonferenza.

L’eccentricità e la sua relazione con la forma dell’ellisse sono ulteriori proprietà geometriche da esaminare, a differenza di altri aspetti delle coniche a cui tradizionalmente si riserva un’importanza eccessiva. Lo sostiene anche la commissione UMI-CIIM nel documento [UMI, 2014] in cui analizza la programmazione annuale alla luce delle Indicazioni nazionali:

> *Si consiglia in ogni caso di privilegiare l’obiettivo di far acquisire agli studenti la conoscenza delle coniche e il significato geometrico delle loro principali caratteristiche quali, per esempio, le simmetrie e l’eccentricità […]. Si sconsiglia di insistere su problemi troppo laboriosi riguardanti posizioni reciproche di intersezioni o di tangenza tra coniche e tra coniche e rette.*

Tornando all’eccentricità, ci si può formare un’idea del suo legame con lo “schiacciamento” della conica mediante l’attività descritta nel file *Eccentricita.ggb*, e lo si può giustificare algebricamente esprimendola in funzione delle lunghezze dei semiassi. Ciò conduce ad *interpretare* l'ellisse come dilatazione della circonferenza e, di conseguenza, ad intuire la formula che fornisce l'*area* del sottoinsieme del piano delimitato dalla curva, magari osservando dapprima come viene trasformata l'area di un quadrato.

Resta da esaminare la proprietà focale di riflessione e lo si può fare mediante l'attività *Proprietà Focale,* investigando il biliardo ellittico e le volte ellissoidali, attraverso disegni su carta, esplorazioni con il software (*PropFocaleEllisse.ggb*) e, se si riesce, con prove su biliardi ellittici materiali. In questo contesto, come in altri analoghi, gli studenti fanno qualche tentativo, riflettono su quanto avviene, formalizzano le proprie congetture e le giustificano; e, nel contempo, vengono invitati ad ascoltare attentamente le argomentazioni dei compagni e a cercare di comprenderle.

Fin qui abbiamo guardato all'ellisse e alla circonferenza dal punto di vista della geometria analitica. Tuttavia porzioni di queste curve si possono interpretare anche come grafici di *funzioni* – l'esempio tipico è $\sqrt{r^2 - x^2}$ – e si possono così impiegare per risolvere semplici *disequazioni irrazionali* mediante l'approccio generale sviluppato nel primo biennio e descritto in [Cappello e Innocenti, 2022, sez. 2.3.2].

Anzi, perché non cogliere l'occasione per discutere la risoluzione per via *algebrica* di semplici equazioni irrazionali? In molti casi, e sono quelli che meritano di essere considerati nella scuola secondaria, è sufficiente elevare al quadrato o al cubo entrambi i membri e verificare (quando si eleva alla seconda) se le soluzioni della nuova equazione sono soluzioni dell'equazione iniziale, sostituendole in quest'ultima; non serve dunque determinare a priori l'insieme di definizione dell'equazione.

E la parabola?

L'abbiamo già esaminata come *grafico* della funzione polinomiale di secondo grado, e, in questi termini, sarà presto approfondita nel percorso relativo alla derivata. Non ci sembra strettamente necessario discutere ulteriori aspetti, tuttavia può aver senso affrontare qualche questione geometrica allo scopo di consolidare l'approccio caratteristico della geometria analitica e sviluppare abilità fondamentali, quali interpretare figure nel piano e passare da un registro di rappresentazione all'altro, in particolare da quello grafico a quello algebrico e viceversa.

Approfondimento. Così si può decidere di caratterizzare la curva come luogo geometrico, costruirla mediante il software o la piegatura della carta (attività *Costruzione della parabola* e file *CostruzioneParabola.ggb*) e scriverne l'equazione. Ma si può anche investigare la proprietà focale di riflessione, magari in laboratorio, in collaborazione con il docente di fisica, utilizzando due specchi parabolici allineati e posizionando nel fuoco di uno dei due una lampadina e nel fuoco dell'altro la capocchia di un fiammifero; l'analisi della questione si può poi ampliare discutendo la leggenda degli specchi ustori di Archimede[7].

1.2.3 Completare la trigonometria del triangolo

Nel percorso relativo alla classe seconda abbiamo definito seno, coseno e tangente nel triangolo *rettangolo* e abbiamo esaminato anche il problema inverso, ossia determinare l'ampiezza dell'angolo a partire da uno di questi tre rapporti ([Cappello e Innocenti, 2022, sezione 2.3.6]).

Ora ci proponiamo di affinare tali strumenti e di integrarli con altri che consentano di operare su un triangolo *qualsiasi,* anche se, prima che ai contenuti, siamo interessati a consolidare abilità di base, in particolare l'interpretazione di figure geometriche e la visualizzazione nel piano e nello spazio.

Per iniziare si può precisare cosa si intende per misura di un angolo in radianti. Non è strettamente necessario farlo in questo contesto – diventa invece opportuno quando si considerano gli aspetti funzionali, come vedremo nel paragrafo 2.2.1 –, ma ci sembra comunque un buon momento per discutere la questione, anche perché può servire per la fisica.

È utile poi riprendere alcuni fatti e alcuni risultati che gli studenti dovrebbero aver incontrato, almeno in parte, nel primo biennio, e organizzarli in modo più sistematico: si tratta dei valori di seno, coseno, tangente per angoli di ampiezza $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, delle due uguaglianze di base che esprimono il legame tra seno, coseno e tangente, ossia $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$, della relazione tra la tangente goniometrica e la pendenza della retta, e della formula che fornisce l'area di un triangolo in funzione delle lunghezze di due lati e dell'ampiezza dell'angolo compreso.

Oltre a tali aspetti di base è interessante approfondire il significato di latitudine e di longitudine nonché di meridiano e di parallelo, magari mediante i file GeoGebra *Latitudine.ggb*, *Longitudine.ggb*, *MeridianiPa-*

[7] Un significativo riferimento è il testo di Carlo Zamparelli, che ci è stato segnalato da Roberto Pignatelli, in cui si indaga se Archimede avesse effettivamente utilizzato gli specchi ustori per bruciare le navi romane durante l'assedio di Siracusa nel 212 a.C., ma anche se è possibile bruciare una nave di legno nel modo indicato dalla leggenda mediante la tecnologia disponibile all'epoca. https://www.gses.it/pub/specchi1.pdf; https://www.gses.it/pub/specchi2.pdf.

ralleli.ggb[8], che facilitano la visualizzazione spaziale e contribuiscono a svilupparla.

A questo punto si può allargare l'orizzonte e passare ad esaminare triangoli anche non rettangoli.

Consigliamo di uscire all'aperto e provare a determinare la distanza tra due oggetti separati da un ostacolo che non permette di effettuare la misura lungo il segmento che li congiunge, ma ai quali si può accedere a partire da uno stesso punto, da cui si vedono entrambi. Come nelle esperienze di misura proposte per il primo biennio, i ragazzi si organizzano in gruppi, riflettono su quali misure possono effettuare tenendo conto degli ostacoli, schematizzano la situazione su carta e cercano di risolvere il problema. È bene lasciarli provare liberamente per un po' e, piuttosto, invitarli a confrontarsi tra di loro; poi, se serve, si può suggerire di fissare un punto particolare, che abbia le caratteristiche indicate prima. Resta così definito un triangolo che si può suddividere in due opportuni triangoli rettangoli, nei quali applicare i risultati noti dal primo biennio.

Ecco dunque il teorema del coseno o di Carnot. In questo contesto è il risultato più significativo sui triangoli qualsiasi, ma ciò che conta è che è stato ricavato dagli *studenti*, in un contesto reale e sfidante, esplorando in prima persona ed arrivando a produrre una dimostrazione; in sintesi, *facendo matematica davvero*.

Di questo e degli altri risultati indicati, normalmente gli studenti si appropriano in breve tempo; semmai mostrano difficoltà nel disporne a lungo, fino alla classe quinta, e per questo serve discutere con loro come riconoscere *quando* è opportuno impiegarli e come si possono *ricostruire* quando servono, in continuità con il lavoro svolto in altri segmenti del percorso, ad esempio nell'ambito della geometria analitica. Tralasciando magari altri contenuti, come il teorema dei seni; ma ne vale la pena.

In ogni caso, gli strumenti introdotti permettono di affrontare questioni un po' più articolate rispetto a quelle discusse nel primo biennio, come quelle che abbiamo raccolto nei fogli di attività *4* e *5*; un riferimento teorico è invece la dispensa *Trigonometria del triangolo*.

A conclusione di questa parte si può poi proporre una verifica che riguarda anche le sezioni coniche; un esempio significativo è verifica *2*.

[8] Realizzati da Michele Avancini.

1.2.4 Anticipare la derivata

Perché?
Ossia per quali ragioni introdurre la derivata nella classe terza?

La derivata *serve* per affrontare alcune questioni che tipicamente si esaminano all'inizio del secondo biennio, quali determinare l'equazione della retta tangente ad una parabola, esprimere e studiare velocità e accelerazione in fisica… Peraltro è uno strumento che consente di risolvere vari problemi di ottimizzazione e dunque di proseguire ed estendere il lavoro iniziato ancora nella classe seconda mediante le funzioni polinomiali di secondo grado ([Cappello e Innocenti, 2022, pag. 81]).

Un'altra ragione è che la derivata è una nozione *fondamentale* dell'analisi, pertanto è opportuno introdurla "presto", in modo che gli studenti abbiano tempo per interiorizzarla e farla propria prima di affrontare questioni più delicate; altrimenti il rischio è che si accontentino (e noi docenti con loro) di svolgere correttamente i calcoli e di impiegarla solo *se* qualcuno *dice* loro di farlo, ma non sappiano decidere autonomamente quando ciò è utile. Ad esempio, dovrebbero riconoscere dal contesto quando si sta parlando del tasso di variazione istantaneo di una grandezza, anche su un libro di fisica o di un'altra disciplina, dovrebbero saperlo interpretare come derivata e utilizzarlo per ricavare informazioni di vario tipo.

Tuttavia ci si può chiedere se abbia senso introdurre la derivata quando i ragazzi non dispongono ancora di una nozione precisa di limite. Per rispondere si può osservare innanzitutto che la derivata è stata impiegata in vari ambiti a partire diciassettesimo secolo, anche se non era ancora stata formulata una definizione rigorosa di limite; infatti la formalizzazione "epsilon-delta", attualmente accettata dalla comunità dei matematici, è stata proposta solo nel 1872 da Heine e la versione mediante gli intorni addirittura nel 1922 ([Boyer, 1990, pag. 645]). La questione è approfondita in [Villani et al., 2012] a pag. 121 e nel capitolo 16, il cui titolo sembra riprendere proprio la nostra domanda: *Come è possibile che molti fondamentali risultati in Analisi precedano una definizione rigorosa di limite, di derivata o di integrale?*

Anche nell'autorevole testo [Accascina et al., 2006, pag. 79] si sostiene che i limiti non costituiscono un prerequisito del calcolo differenziale:

> *A questo stadio […] non si ritiene strettamente necessario richiedere una definizione rigorosa di limite. Si ritiene sufficiente che lo studente conosca alcune proprietà dei limiti, come la linearità e la monotonia, e sappia utilizzarle in semplici situazioni. Tali proprietà non sono però indicate come prerequisiti e si ritiene che sia sufficiente introdurle, illustrarle*

e giustificarle, almeno in qualche forma semplice, mentre si sviluppa la derivata.

Cosa?

Chiarite le ragioni, resta da decidere quali aspetti esaminare e in quale ordine farlo.

Per quanto appena osservato, il punto d'arrivo del nostro percorso sulla derivata nella classe terza è determinare l'equazione delle rette tangenti al grafico di una funzione e risolvere semplici problemi di ottimizzazione.

Ora, nell'introdurre un nuovo oggetto matematico, si dovrebbero prima costruire alcuni *significati*, e solo in un secondo momento ci si dovrebbe preoccupare della formalizzazione e del calcolo. Anzi, nel caso della derivata, riteniamo che questi ultimi aspetti vadano discussi solo in parte nella classe terza: la derivabilità, la derivata delle funzioni composte e i teoremi classici sulle derivate – come il teorema di Lagrange –, sono più delicati e richiedono una certa maturità per essere compresi a fondo, perciò preferiamo affrontarli nelle classi successive.

Questo schema è dunque diverso da quello dei libri di testo, che invece si preoccupano fin dall'inizio di approfondire nel dettaglio la derivabilità delle funzioni, di esaurire in un unico blocco il calcolo, compresa la derivata delle funzioni composte, e di anticipare i teoremi classici così da avere gli strumenti per dimostrare la relazione tra l'andamento della funzione e la derivata. Insomma, fanno prevalere l'esigenza di organizzare deduttivamente i contenuti in un ordine logico impeccabile, anche se questo ordine non rispecchia i bisogni reali degli studenti, favorisce l'addestramento e ostacola l'apprendimento. Il rischio è dunque che gli studenti sappiano *calcolare* la derivata ma non ne dispongano come oggetto matematico, ad esempio non la sappiano interpretare come tasso di variazione in un dato contesto; se ne parla in [Bressoud et al. 2016, pag. 10 e 11], che riporta le principali difficoltà mostrate dai ragazzi.

Quanto?

Cioè, quali aspetti affrontare della nostra proposta, a seconda del tempo che si intende dedicare al tema?

Precisiamo subito che non è sempre ragionevole anticipare la derivata alla classe terza. Infatti prima è opportuno che gli studenti abbiano esaminato gli aspetti significativi del percorso relativo al primo biennio e, in particolare, sappiano operare a livello elementare, ma con sicurezza, con le funzioni e i grafici; riteniamo poi prioritari gli altri temi che abbiamo previsto per la classe terza, ossia la geometria analitica e la funzione esponenziale.

Inoltre la nostra proposta è ricca e, nella sua versione completa, richiede un mese e mezzo/due di lezione; è senza dubbio un buon investimento, ma, se non si dispone di questo tempo oppure se la classe è fragile, si dovranno operare delle scelte e concentrare l'attenzione sulle questioni nodali. Le evidenzieremo nella descrizione del percorso; in particolare, le formule di derivazione del prodotto e del quoziente e l'uso della derivata per tracciare il grafico di una funzione si possono posticipare alla classe quarta; addirittura si può decidere di affrontare solo il problema delle tangenti, anche se in questo caso si snatura un po' il percorso.

Dai problemi di ottimizzazione…

Come motivare lo studio della derivata ai ragazzi? Noi preferiamo partire da lontano, dai problemi di *ottimizzazione*. Per risolverli, osserveremo innanzitutto che è utile ricorrere alla *pendenza del grafico* della funzione da ottimizzare*;* e nell'esaminarla ci accorgeremo che si può esprimere come *limite*, un limite che interviene in diversi contesti e che, pertanto, ha senso studiare e indicare con un nome specifico.

In sostanza, prevediamo dunque tre passi intermedi: ottimizzazione, pendenza della retta tangente e limite; tuttavia ciascuno di essi costituisce di per sé una motivazione significativa e, perciò, può essere assunto come inizio del percorso.

Abbiamo già discusso alcuni problemi di massimo e minimo nella classe seconda; si trattava di problemi risolubili mediante strumenti elementari, quali l'esame del grafico della funzione polinomiale di secondo grado o considerazioni geometriche, e sono questi che intendiamo richiamare brevemente nella classe terza, in modo da radicare con continuità le nuove conoscenze su quelle pregresse. L'approccio è quello che la Sfard indica come *continuità del discorso* e che considera uno dei principi fondamentali nel processo di apprendimento e insegnamento, come chiarisce in [Sfard, 2009, pag. 294]:

> *Introdurre un nuovo discorso trasformandone uno già esistente è sicuramente più efficace che cercare di costruirne uno ex novo. Più specificamente sembra che la via più sicura per arrivare a nuove esplorazioni sia quella di presentarle come (possibili) miglioramenti di atti familiari.*

A questo punto l'idea è di proporre un problema che gli studenti non sappiano risolvere mediante gli strumenti matematici di cui dispongono.

> *Un'azienda intende produrre barattoli cilindrici di lamiera che contengano 1 litro di passata di pomodoro. Qual è la minima quantità di materiale necessaria per realizzare il barattolo?*

Naturalmente è solo un esempio, tra altri che si prestano allo scopo. È un quesito classico, assegnato più volte in versioni analoghe nella seconda prova dell'Esame di stato. Si tratta, in sostanza, di minimizzare la superficie totale del cilindro di volume assegnato V, ma questa riformulazione del problema non è scontata e va discussa assieme ai ragazzi; è un'occasione per sperimentare che costruire un modello comporta prendere *decisioni*, anche se nel nostro caso non sono poi molte, e certamente meno di quelle esaminate in [Adams, 2004, pag. 187] relativamente ad una versione più generale del problema.

Precisata la questione, gli studenti esplorano la situazione, progettano alcuni cilindri del tipo richiesto e, perché no, li realizzano, come indicato in [Anzellotti, Cappello, Innocenti, 2005], e arrivano a schematizzare il problema mediante la funzione $A(r) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$. Tuttavia non sono ancora in grado di calcolare il punto di minimo. Come fare allora?

Per iniziare, si può tracciare con un software il grafico della funzione $A(r)$. L'aspetto più delicato è *collegare* questa rappresentazione ai cilindri in esame ed è cruciale farlo per mantenere il controllo semantico sul procedimento di ottimizzazione: per questo abbiamo realizzato l'attività descritta nel file *Barattolo.ggb*, che permette di visualizzare dinamicamente entrambi i punti di vista e *sperimentare* la loro stretta corrispondenza.

Osservando il grafico e ragionando assieme al docente, i ragazzi possono pensare di risolvere il problema ricorrendo alla pendenza della retta tangente: il punto di minimo si ottiene quando la retta è orizzontale, almeno in questo caso[9]. Perciò il passo successivo sarà approfondire cosa sia e come si possa determinare la retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto.

… alla retta tangente. Il concetto

Per iniziare a comprenderlo, gli studenti possono provare a tracciare con *matita e righello* la retta tangente in un punto assegnato ad alcuni grafici rappresentati su un foglio; in questa fase faranno riferimento alla propria idea di retta tangente e, cosa fondamentale, cercheranno di precisarla, descrivendo la costruzione nel linguaggio naturale. Probabilmente emergerà che per una parte di loro è la retta che interseca

[9] La relazione tra punti in cui la tangente al grafico è orizzontale e punti di massimo (minimo) merita attenzione e va approfondita in classe, anche se magari più avanti nel percorso. In particolare non deve essere ridotta ad immagini prototipiche: ad esempio, il massimo può essere assunto anche in un punto del bordo dell'insieme di definizione, non solo in un punto interno, e in questo caso la retta tangente non è necessariamente orizzontale.

la curva in un unico punto; è un noto *misconcetto* che va superato discutendone con i ragazzi e chiedendo loro di produrre opportuni controesempi.

Con ciò non vogliamo certo demonizzare i misconcetti, anzi. E per chiarirlo, prima di proseguire, partiamo da alcune considerazioni espresse in [Sfard, 2009, pag. 42 e pag. 308]:

> *Ci troviamo davanti ad una misconcezione ogni volta che un allievo utilizza un certo concetto, ammettiamo una funzione, in un modo che, benché sistematico e invariante attraverso i contesti, differisce dal modo in cui lo stesso concetto è adoperato dagli esperti.*
>
> *Come possiamo spiegare il fatto che alcuni di questi errori siano condivisi da moltissimi bambini in tutto il mondo? Cosa ancora più sconcertante, come mai le "misconcezioni" degli scolari sono spesso molto simili a quelle degli scienziati o dei matematici che per primi hanno pensato i concetti in questione?*

Quest'ultima osservazione porta a ritenere che i misconcetti non vadano considerati come errori veri e propri, e la ragione è che essi sembrano connaturati al comprendere, come chiarisce anche la Zan in [Zan, 2007, pag. 76]:

> *Le contestazioni più recenti all'uso del termine 'misconcetto' sono basate sul rifiuto della connotazione negativa considerata implicita nel prefisso 'mis' ma anche sulla messa in discussione della possibilità di parlare di 'correttezza' (e quindi di scorrettezza) in termini assoluti. Secondo un punto di vista condiviso da molti ricercatori […] i misconcetti sono infatti considerati un momento necessario nel passaggio da un certo livello di conoscenza ad uno superiore, in quanto l'apprendimento richiede continuamente una ricostruzione cognitiva che implica un periodo di conflitto e confusione.*

Tornando al nostro percorso, se non è la retta che interseca la curva in un solo punto, qual è il significato di retta tangente?

L'idea, ricorrendo anche allo *zoom* su grafici come quello proposto nel file *TanSignificato.ggb*, è di condurre i ragazzi ad osservare che è una retta che *approssima la curva vicino ad un suo punto*; e fin qui non dovrebbero esserci particolari difficoltà. Più delicata è invece l'ulteriore precisazione che, tra le rette che passano per il punto, la tangente è quella che approssima *meglio* la curva, poiché gli studenti potrebbero pensare che ci siano *più rette* che approssimano localmente la curva meglio delle altre. Noi docenti sappiamo però che esiste un'unica retta che ha la proprietà richiesta e che ciò si può esprimere rigorosamente e dimostrare, ad esempio come in [Giusti, 1989, pag. 179]; tuttavia nella scuola secondaria, secondo noi, questo risultato va presentato informalmente, facendo riferimento all'idea intuitiva dei termini "approssimazione", "vicino", analogamente a quanto è avvenuto nella storia della matematica.

Considerazioni simili sono espresse in [Tall, 2016, pag. 311]:

> *Il grafico ha una tangente in un punto se e solo se in quel punto è localmente lineare. Ingrandendo un grafico intorno ad un punto particolare dove esso è localmente lineare si scopre che grafico e tangente ben presto diventano indistinguibili. La tangente è la «miglior approssimazione lineare» alla curva in un dato punto. Lontana dal toccare la curva in un singolo punto, quando viene disegnata da una matita con uno spessore di dimensione finita, nell'immagine ingrandita la tangente e il grafico appaiono esattamente la stessa cosa, entro l'accuratezza fisica del disegno.*
>
> *Questo include la comprensione della tangente ad una retta (dove la tangente e la retta stessa coincidono), o in un punto di flesso, passando da un lato della curva all'altro. Entrambe appaiono nel calcolo infinitesimale e risultano problematiche per uno studente che crede che la tangente «tocca la curva in un punto senza intersecarla».*

Chiarito cos'è la retta tangente, come *costruirla?* Lo si può fare interpretandola come "limite" delle rette secanti in quel punto e lo si può discutere con gli studenti mediante il file *TanCostruzione.ggb*, che permette di visualizzare dinamicamente il procedimento. Un riferimento per questi aspetti, e per gli altri esaminati nella sezione, è invece la prima parte della dispensa *Retta tangente*, che mostriamo nel paragrafo 3.2 assieme agli altri materiali realizzati sul tema.

Ora il calcolo

Resta così il problema di calcolare il valore "esatto" della pendenza.

Approfondimento. Prima, però, preferiamo trovarne delle *approssimazioni* per permettere agli studenti di investigare la nozione e prepararli alla sua sistemazione rigorosa. Peraltro, i processi di approssimazione sono alla base dell'Analisi, come si legge in [Accascina et al., 2006, pag. 71]:

> *Tutta l'Analisi è fondata su [...] processi di approssimazione [...]. Si hanno però anche "regole" di calcolo, la cui potenza e semplicità d'uso può portare a mettere in ombra il significato e il ruolo dell'approssimazione e delle stime e a far risaltare soprattutto l'aspetto algebrico dell'Analisi Matematica. Si ritiene invece che questo aspetto debba accompagnarsi ad una solida padronanza almeno di alcuni esempi assai semplici di approssimazione.*

L'attività che proponiamo è *Approssimazione della retta tangente* con il file *TanStima.xlsx*. L'obiettivo è appunto fornire, in casi semplici, una *stima* della pendenza del grafico, ossia individuare un intervallo in cui cade tale valore, e, per farlo, l'idea è di ricorrere prima alla carta e al righello, in modo da prendere confidenza con la situazione, e poi al foglio di calcolo, che esige di esprimere mediante una *formula* la pendenza delle rette secanti e induce così a compiere un ulteriore passo verso la formalizzazione.

Gli studenti, anche mediante l'attività descritta nei file *TanCoordinate.ggb* e *TanCoordinateStudente.ggb*, provano poi a calcolare la pendenza dei grafici di alcune semplici funzioni di cui è assegnata l'espressione, discutendone tra loro e con il docente. In sostanza, si tratta di *tradurre in coordinate* il procedimento di costruzione analizzato con tante attenzioni nelle attività precedenti, per concludere che la pendenza della retta tangente è data dal limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, come è descritto nella seconda parte della dispensa *Retta Tangente*.

Per consolidare ed approfondire tali questioni c'è il foglio di attività 6. In esso si dà attenzione anche ad *aspetti algebrici*, come lo sviluppo di un'espressione della forma $(a + b)^3$, necessario per il calcolo di un limite. Secondo noi, non serve che gli studenti lo ricordino a memoria, purché sappiano interpretare l'espressione come prodotto dei fattori $(a + b)^2$ e $(a + b)$ e svolgano il calcolo in tempi ragionevoli. Ciò che conta, infatti, è saper ricavare le formule di cui si ha bisogno a partire da altre formule di base, come avviene in questo caso: è un'abilità che dovremmo curare e richiedere ai nostri ragazzi, anche a quelli che magari non proseguiranno gli studi in ambito scientifico.

Un limite speciale e la definizione di derivata

Osserviamo innanzitutto che il limite a cui siamo giunti si può scrivere, e pensare, nella forma espressiva $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Ora, questo limite non compare solo nell'ambito delle rette tangenti, ma interviene in *diversi contesti*: in fisica (ad esempio, per esprimere la velocità, l'intensità di corrente), in economia (costo marginale di produzione), in medicina (sensitività alla variazione del dosaggio)…, come è precisato nella lettura [Adams, 2004, pag. 138 e 139], un riferimento alla portata degli studenti pur di tralasciare il calcolo della derivata di funzioni composte.

Pertanto è *utile* studiare tale limite e ha senso attribuirgli un *nome*, quello di *derivata* appunto.

Tutte queste considerazioni sono raccolte nella dispensa *Definizione di derivata* assieme al fatto che, in generale, il limite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ esprime la *rapidità di variazione* di una funzione f al variare di una variabile x, e precisamente è il *tasso istantaneo* di variazione di f.

Approfondimento. Proprio per investigare la nozione di variazione abbiamo realizzato il foglio di attività 7. Non serve esaminarlo subito nel percorso, si può decidere di dare la precedenza agli aspetti operativi, ma in ogni caso è bene tener presente che riporta questioni didatticamente rilevanti, come si legge negli Obiettivi specifici di apprendimento per il secondo biennio delle Indicazioni nazionali:

Un tema importante di studio sarà il concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione.

Due attenzioni didattiche. Una riguarda l'utilità di approfondire qualche aspetto storico della derivata, visto che la nascita del calcolo infinitesimale è uno dei momenti più importanti dello sviluppo del pensiero matematico, come è scritto nelle Linee generali delle Indicazioni nazionali:

Lo studente […] avrà acquisito il senso e la portata dei principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, [...] la matematica moderna [...].

Ma al di là del tema specifico, discutere la storia della matematica a scuola permette di mettere in luce il legame tra la nostra disciplina e la *cultura*, consente di mostrare che è una materia *viva* ed induce a riflettere sugli *oggetti* che la caratterizzano. Lo scrive Giacardi in [Giacardi, 2013] ed emerge anche dalla illuminante lettura [Klein, 1999, da pag. 399 a 401], che illustra i motivi della nascita del calcolo differenziale nel XVII secolo. In sostanza, serviva rispondere con urgenza ai problemi posti all'epoca dalla scienza, che consistevano nel determinare velocità e accelerazione dei corpi, tracciare le tangenti alle curve – per risolvere, ad esempio, problemi di ottica –, affrontare problemi di massimo e minimo – come la gittata… Problemi che, a ben guardare, sono proprio quelli che motivano anche il nostro percorso sulla derivata!

C'è un'ulteriore attenzione didattica che vorremmo considerare e che abbiamo già esaminato nel percorso relativo al primo biennio: è la necessità di promuovere il *passaggio da processo ad oggetto.* Secondo la Sfard ([Sfard, 1991]), nella fase iniziale della costruzione di un concetto prevale una visione procedurale, ma poi, per affrontare situazioni via via più articolate, è opportuno riferirsi alla nozione matematica come fosse una cosa reale e manipolarla senza occuparsi dei suoi dettagli. Ad esempio, se lo studente interpreta la frazione solo come processo di divisione, difficilmente riuscirà ad utilizzarla in un contesto più articolato come quello delle equazioni.

È per questo che nella prima parte del percorso facciamo in modo che gli studenti prendano confidenza con i processi di costruzione, di approssimazione e di calcolo della derivata; ed è per questo che poi, anche mediante il foglio di attività 7, li guidiamo a pensare la derivata *direttamente* come *ente* matematico. Se gli studenti vedono solo le procedure, ossia le *azioni* sugli oggetti, ma non gli oggetti, si corre il rischio di rendere ridicola la stessa matematica, come chiarisce l'autrice in [Sfard, 2016] ricorrendo alla metafora del giocoliere:

> *Agli occhi dei suoi studenti spesso l'insegnante appare come un giocoliere di cui essi non riescono a vedere gli oggetti che lancia in aria.*

La definizione non basta: i primi strumenti di calcolo

Abbiamo così definito e interpretato la derivata di una funzione; tuttavia ricorrere alla definizione per calcolare la derivata, di solito, non è efficiente. In particolare, non lo è per determinare il minimo della funzione $A(r) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$ che modellizza il problema di ottimizzazione proposto all'inizio del percorso.

Allora è opportuno introdurre alcune formule generali, ad iniziare da quelle che forniscono la derivata delle *funzioni base* esaminate fino qui, ovvero le funzioni potenza x^α, dove $\alpha \in \mathbb{Q}$ (dispensa *Derivata: primi aspetti di calcolo*[10]). La nostra idea è di ricavare rigorosamente la derivata in alcuni casi elementari, come $\alpha = 2, 3, -1, \frac{1}{2}$, e poi, a partire da questi, congetturare la formula per il generico α.

Tutto semplice allora? Non proprio, dato che per gli studenti non è banale attribuire un significato alle espressioni che così si ottengono. Perciò è utile tornare all'interpretazione geometrica della derivata e osservare che al variare del punto sul grafico varia anche la retta tangente in quel punto, e così, data una funzione (sufficientemente regolare), resta definita una *nuova funzione* che restituisce la pendenza della tangente in ogni punto; l'espressione di questa nuova funzione è proprio quella che abbiamo ottenuto prima con il calcolo.

Di fatto, abbiamo così introdotto la *funzione derivata*, ma prima di approfondirla riteniamo sia meglio che gli studenti interiorizzino la nozione di derivata in un punto.

Il passo successivo è precisare il *comportamento* della derivata ri-

[10] Fino a questo punto del percorso non abbiamo ancora introdotto le potenze ad esponente *razionale*. Nel blocco relativo alla derivata ci si può limitare a fornirne la definizione; invece la sua giustificazione si potrà discutere in seguito, nel contesto più generale della funzione esponenziale.

spetto alle *operazioni* con le funzioni: in un primo momento è sufficiente considerare l'addizione (sottrazione) e la moltiplicazione per una costante, o, in altre parole, la *linearità* della derivata.

Quest'ultima è una nozione fondamentale e il suo significato va discusso con i ragazzi per permettere loro di formarsi un'idea della *matematica moderna*, ossia della matematica che si occupa di strutture e di relazioni invece che di oggetti specifici. Di questo avviso era già diversi anni fa la Castelnuovo, che scriveva in [Castelnuovo, 2017, pag. 60 e 62]:

> *Siamo certamente tutti d'accordo nel riconoscere che l'educazione scientifica deve avere come scopo di far passare da una visione magica, soprannaturale del mondo che ci circonda ad un'obiettiva consapevolezza e ad un sereno giudizio dei fenomeni naturali; deve essere, in breve, una continua ascesa nell'arte del saper guardare.*
> *[…] Nella faticosa ascesa nell'arte del saper guardare abbiamo visto quali immensi progressi scientifici siano stati suggeriti dall'idea di cogliere in gruppi disuguali cose uguali, cioè di concepire l'uguaglianza da un punto di vista sempre più largo. […] Ed è questo stesso principio, sempre applicato in campi astratti, che condurrà la matematica ad un più alto grado di astrazione, portando l'attenzione non più sul particolare ente (sia esso numero o figura) ma sulle leggi formali che legano questi enti. […] Non è difficile avviare il ragazzo alla comprensione del concetto di struttura, fondamentale nelle matematiche […].*

Gli strumenti appena introdotti sono elementari, ma permettono già di risolvere in modo efficiente varie questioni, quali scrivere le equazioni delle rette tangenti, condotte anche *da un punto non appartenente al grafico,* oppure determinare i punti stazionari della funzione $A(r)$ e così risolvere il nostro problema iniziale (fogli di attività *8* e *10*).

Tra l'altro, tali quesiti permettono di consolidare il calcolo algebrico in un contesto motivante per gli studenti: richiedono infatti di risolvere equazioni – anche irrazionali – o sistemi, in vista di un obiettivo che i ragazzi percepiscono come autentico; le stesse equazioni sortirebbero un effetto ben diverso se invece fossero proposte in astratto, magari nell'ambito di un (discutibile) ripasso all'inizio dell'anno scolastico.

E con ciò sono già molti gli aspetti esaminati nel percorso sulla derivata: è opportuno fermarsi e valutare l'insegnamento e l'apprendimento mediante una verifica come verifica *3*.

Approfondimento. I fogli di attività *9* e *11* permettono di investigare ulteriormente la derivata e di consolidarne l'uso. Il primo richiede di *modellizzare* semplici situazioni e di esaminare criticamente un procedimento seguito nella *storia*; il secondo, invece, di risolvere alcuni quesiti dall'Esame di stato e di dimostrare semplici proposizioni.

Dalla derivata all'andamento della funzione; i problemi di ottimizzazione, finalmente

Fin qui, a parte qualche eccezione, abbiamo esaminato la funzione *localmente*. Ora ci proponiamo di allargare lo sguardo e *investigare* il legame tra la crescenza (decrescenza) della funzione e l'andamento della derivata, nonché quello tra i punti di massimo (minimo) e la derivata.

Per iniziare abbozzeremo il grafico della derivata in semplici casi, ma poi considereremo anche la questione *inversa*, cioè costruire un possibile grafico della funzione a partire da informazioni sulla derivata, poiché esaminare la situazione da due angolazioni diverse permette di comprendere più a fondo. E il fatto che le risposte non siano semplicemente numeri contribuisce a fornire un'idea più completa di cosa significa fare matematica.

Al solito, lavoreremo direttamente sui grafici, utilizzando prima la quadrettatura e il righello e poi GeoGebra, come indicato nel foglio di attività *12* con i file *FunzioneDerivata1.ggb*, *FunzioneDerivata2.ggb*. E metteremo "le mani" sul problema, anche nel senso indicato in [Tall, 2016, pag. 302, 303]:

> *L'approccio localmente lineare al calcolo infinitesimale inizia con la percezione del grafico della funzione stesso che possiamo tracciare con un dito e vedere come un oggetto disegnato praticamente sulla carta oppure mentalmente. Questo ci permette di sentire la continuità del grafico come una continuità dinamica. Non ci dice molto, però, del cambiamento della pendenza.*
> *Ora immaginiamo di far scivolare la mano lungo la curva in modo da lasciare che l'inclinazione della mano segua la pendenza della curva che cambia. Questa è un'operazione su un oggetto visibile (il grafico) e crea il senso incorporato del cambiamento della pendenza della curva.*
> *Per vedere la pendenza che cambia, immaginiamo di muovere una lente d'ingrandimento lungo la curva per vedere la pendenza cambiare col movimento della lente.*

Approfondimento. L'aspetto delicato è riuscire a visualizzare la pendenza della retta tangente in un punto del grafico, al variare del punto sul grafico. È un esempio significativo di *covariazione* tra variabili, ossia di variazione simultanea di due variabili: nel nostro caso, si tratta della posizione del punto e della pendenza, ma si può descrivere come covariazione anche la costruzione della tangente in un punto del grafico come limite delle secanti, dato che al variare del punto mobile sulla curva cambiano le pendenze delle secanti. Più in generale, come si osserva in [Colacicco, Lisarelli, Antonini et al., 2017], la covariazione ha un ruolo centrale nella formazione del concetto stesso di funzione: infatti, oltre a pensare la funzione *staticamente* come grafico o come formula è importante intuire e saper descrivere come varia una variabile al variare di un'altra.

Perché allora non approfittare dell'occasione per approfondire tali aspetti, magari mediante l'attività descritta nel file *Covariazione.ggb*?

In sostanza si ricorre ad una particolare rappresentazione della funzione, che si può indicare come "dinamica parallela". *Parallela* poiché l'asse y è disposto parallelamente all'asse x; *dinamica* poiché, per descrivere il legame tra le due variabili, si muove il generico punto sull'asse x e, di conseguenza, si fa muovere sull'asse y il punto che gli corrisponde. Agli studenti si richiede di osservare la rappresentazione dinamica parallela fornita nel file e provare a tracciare *qualitativamente* un possibile grafico di tale funzione in un sistema di coordinate cartesiano ortogonale.

È un'attività che ha senso proporre già nel primo biennio, proprio per costruire, come dicevamo, il concetto di funzione.

A conclusione di queste esplorazioni, *preciseremo* il legame tra la derivata e l'andamento della funzione, per gradi, formulando congetture, discutendole, affinandole mediante opportuni controesempi, e provando ad enunciare i risultati generali (dispensa *Derivata e andamento della funzione*).

Le dimostrazioni invece possono attendere fino alla classe quinta, quando gli studenti saranno più maturi per avvertirne l'esigenza e per apprezzarle, anche se devono aver chiaro fin d'ora che l'esame del grafico *non* è una dimostrazione. Certo, non giustificare rigorosamente ogni affermazione può farci sentire a disagio; eppure, come docenti, dovremmo preoccuparci di più quando, magari per consuetudine, proponiamo argomentazioni troppo astratte e sofisticate o procedure molto tecniche, che non contribuiscono davvero alla crescita culturale dei nostri studenti.

Possiamo essere soddisfatti! Infatti i risultati ottenuti consentono di risolvere diversi problemi di *ottimizzazione:* quelli che si modellizzano mediante le funzioni potenza e le loro combinazioni lineari e che riguardano vari ambiti, dalla geometria sintetica, piana e dello spazio, alla geometria analitica… Ne proponiamo alcuni nei fogli di attività *13* e *14*, e ci aspettiamo che, per il lavoro svolto, gli studenti li affrontino con consapevolezza e anche con soddisfazione.

Ulteriori strumenti di calcolo: perché no?

Il percorso sulla derivata delineato fin qui è già molto ricco, soprattutto se si considera che è rivolto a studenti della classe terza. Pertanto, a seconda del contesto classe e del tempo che resta a disposizione, si dovrà valutare se fermarsi e lasciare spazio agli altri temi previsti, oppure compiere un ulteriore passo e introdurre la derivata del prodotto e del quoziente.

Le ragioni per farlo sono di tipo diverso per le due operazioni: per la moltiplicazione sono soprattutto teoriche – sondare se l'operatore derivata è lineare anche per la moltiplicazione di due funzioni oltre che per l'addizione –, mentre per il quoziente sono pratiche – risolvere alcuni problemi di ottimizzazione che prevedono di ricorrere a figure simili; ad esempio:

Determinare il triangolo minimo circoscritto ad un rettangolo dato.

Approfondimento. La dimostrazione di queste formule non ci sembra significativa; peraltro è delicata in questa fase, poiché coinvolge la nozione di continuità di una funzione. È molto più utile sondare se la derivata è lineare rispetto alla moltiplicazione di funzioni, giustificare rigorosamente la risposta mediante un controesempio, e congetturare una possibile formula, dopo aver osservato che deve essere simmetrica nelle due funzioni visto che la moltiplicazione è commutativa (dispensa *Derivata: ulteriori aspetti di calcolo*).

Il contesto offre pure l'occasione per *consolidare il calcolo algebrico*: infatti, per studiare il segno della derivata del prodotto o del quoziente è necessario manipolare l'espressione ottenuta, per trasformarla in altre equivalenti ma più adatte allo scopo. L'aspetto interessante, e per certi versi sorprendente, è che la situazione sembra motivare fortemente gli studenti a farlo.

Tuttavia questi nuovi strumenti di calcolo hanno un campo di impiego più vasto: ad esempio, consentono di precisare l'andamento di alcuni tipi di funzioni e di tracciarne il grafico. Sono aspetti che esaminiamo nel foglio di attività *15*, mentre nel foglio di attività *16*, oltre alla giustificazione guidata della formula della derivata del quoziente, proponiamo questioni di consolidamento, che però non coinvolgono le ultime formule introdotte.

Un esempio di verifica sulla seconda parte del percorso relativo alla derivata è verifica *4*.

1.2.5 Come opera davvero la funzione esponenziale?

Finora nel percorso abbiamo considerato varie funzioni, ma abbiamo discusso a fondo solo le funzioni potenza e quelle che si ottengono da esse mediante le quattro operazioni. È arrivato il momento di arricchire il bagaglio di cui gli studenti dispongono e, per questo, ci proponiamo di introdurre la funzione esponenziale; le funzioni trigonometriche invece si possono esaminare nella classe quarta, come abbiamo chiarito nel paragrafo 1.1.

Ma quali aspetti affrontare? E in quale ordine?

Costruire la funzione esponenziale e la funzione logaritmo, discutere come tali funzioni possano *modellizzare* molti fenomeni di crescita, introdurre la *base naturale* e dunque la *derivata* della funzione esponenziale: sono questi gli aspetti che riteniamo più significativi.

In altre parole, non esistono solo le equazioni e le disequazioni esponenziali, come invece sembrano far credere i libri di testo, considerata la percentuale di pagine che riservano al calcolo. Con ciò non vogliamo dire che le equazioni e le disequazioni non siano importanti; anzi, gli studenti dovrebbero dedicare un tempo adeguato, a casa e a scuola, per esaminarle e arrivare a risolverle con sicurezza. D'altra parte anche noi docenti dovremmo investire del tempo, a casa e a scuola, per individuare le tipologie più significative, discuterle con i ragazzi e aiutarli a sviluppare l'abilità di giustificare ogni passaggio a partire da pochi principi di base.

Veniamo così alla seconda questione, l'*ordine* in cui sviluppare i contenuti.

- La nostra idea è di introdurre la funzione esponenziale come *modello* di semplici situazioni, per mostrare fin da subito l'importanza di una funzione che, assieme alle funzioni potenza e trigonometriche, schematizza *gran parte* dei *fenomeni naturali*.
  Ma c'è un'altra ragione, altrettanto importante. La vediamo su un esempio: la scrittura $2^{\frac{1}{2}}$ certamente non vuol dire "2 per sé stesso mezza volta"; tuttavia, se si descrive l'espansione di un gas mediante la funzione 2^t, allora $2^{\frac{1}{2}}$ si interpreta come il volume occupato dal gas all'istante $t_0 = 0{,}5$ secondi. Così $2^{\frac{1}{2}}$ non è più solo un oggetto astratto, di quelli che si studiano durante le ore di matematica e unicamente perché si trovano sul libro di testo o lo dice il docente, ma diventa un oggetto che ha un *significato* e che ha senso considerare.

- La funzione esponenziale mostra gran parte delle sue caratteristiche già sull'insieme dei *numeri naturali*. Pertanto, se si vuole comprendere come si comporta *davvero, è opportuno investigarla a fondo in questo ambiente*, dove è più facile operare.

- È formativo esaminare la funzione logaritmo *in parallelo* alla funzione esponenziale: ciò significa introdurre la funzione logaritmo subito dopo aver definito l'esponenziale sui numeri naturali, ed estenderla ad ogni estensione della funzione esponenziale. Infatti le due funzioni, essendo una l'inversa dell'altra, offrono due punti di vista diversi per guardare la stessa situazione; perciò, esaminandole insieme, si comprendono meglio entrambe.

Queste idee hanno ispirato alcuni anni fa i percorsi *Esponenziale e Logaritmo 1 e 2*, realizzati con il Laboratorio DiCoMat nell'ambito del progetto [Orientamat, 2006]; essi costituiscono ancora un utile riferimento per gli studenti e per i loro docenti. Le stesse idee sono alla base dello stimolante video [Anzellotti, 2015], che però è rivolto soprattutto agli insegnanti.

Funzione esponenziale sui numeri naturali: una rappresentazione espressiva

Per iniziare si può discutere un problema come questo:

Hai un capitale di 10.000 €. Ti vengono proposti due investimenti: uno al tasso annuale del 3% composto, l'altro al tasso annuale del 3% semplice.

- *Prevedi che ci sia "poca" differenza tra i due investimenti?*
- *Determina il valore del capitale dopo 20 anni nelle due modalità.*

La questione è già stata proposta nel percorso relativo alla classe prima ([Cappello e Innocenti, 2022, sez. 2.2.1], dispensa *Percentuali: questioni di base*) e ora si tratta di consolidarla e affinarla, lasciando che gli studenti la esplorino nuovamente.

Nella classe terza è ancora più importante che, per calcolare il capitale maturato ogni anno nel regime di capitalizzazione composta, i ragazzi non ricorrano al modello additivo – sommare il 3% –, ma utilizzino il modello *moltiplicativo* – moltiplicare per 1,03 –, e lo facciano perché hanno *sperimentato* in prima persona che il secondo approccio è più efficiente. È utile ricorrere anche al foglio di calcolo, poiché richiede di *esplicitare* le regole con cui si costruiscono le due sequenze di capitali e permette di visualizzare con immediatezza i loro grafici, come mostra l'attività descritta nel file *Capitalizzazione3.xlsx*.

Il problema degli investimenti è risolto, ma vogliamo compiere un ulteriore passo e osservare che, più in generale, all'anno t nel regime di capitalizzazione composta il capitale è dato da $C(t) = 10.000 \cdot 1{,}03^t$; abbiamo così introdotto una "nuova" funzione, una funzione del tipo ka^x, dove x è un numero naturale, per ora.

Ebbene, la funzione a^x interviene in diversi contesti (lettura *Modelli esponenziali*, che si basa anche sul significativo testo [Israel, 2002]): nella crescita di popolazioni di batteri, nella costruzione della curva di Koch, nel decadimento radioattivo, nella frequenza delle note musicali... Per questo ha senso studiarla e attribuirle un nome; e, per comprendere meglio come opera, almeno all'inizio può essere utile indicarla con la notazione exp_a, in particolare quando la si compone con la sua inversa, la funzione logaritmo in base a.

Per iniziare ad esaminarla si può far riferimento al foglio di attività *17*, che richiede di analizzare varie situazioni anche a partire da *dati reali*, come l'andamento del numero degli abitanti degli Stati Uniti in un certo periodo storico. Inoltre merita far osservare agli studenti che secondo un decreto ministeriale, il *D.M. n. 343 del 2016,* la banca sostanzialmente non può applicare un tasso composto sul debito del conto corrente ma deve applicare un tasso semplice[11]; pertanto conoscere le crescite esponenziali e saperle distinguere da quelle lineari non è solo una faccenda da matematici, ma permette di comprendere il senso di una norma che tutela il risparmiatore.

Il passo successivo consiste nell'esaminare, o meglio, *riesaminare* nel linguaggio delle funzioni, la *proprietà caratterizzante* della funzione esponenziale, che abbiamo già discusso nel percorso relativo alla classe prima. Il termine "caratterizzante" deriva dal fatto che, fissato $a > 0$ esiste un'unica funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(1) = a$ e che trasforma somme in prodotti, ossia verifica l'uguaglianza $f(x + y) = f(x)f(y)$ per ogni x, y.

La proprietà si può leggere direttamente sulla tabella con cui già dalla classe prima schematizziamo la situazione e si traduce in una *regola di spostamento* che mostra in modo espressivo come *opera davvero* la funzione (dispensa *Esponenziale: costruzione 1*); perciò tale regola è alla base di tutto il nostro percorso.

È interessante osservare che una rappresentazione analoga si trova già nell'*Arenario* di Archimede, e come è comparsa "presto" nella storia del pensiero matematico, dovrebbe essere presentata "presto" anche agli studenti e apparire loro naturale. Infatti, secondo la ricerca, ad esempio [Sfard, 1991] e [Furinghetti, 1993], lo sviluppo cognitivo di un concetto nell'individuo segue in molti casi un percorso simile all'evoluzione dell'oggetto matematico nella storia, pur con le differenze che derivano da fattori sociali, culturali e tecnologici, come precisa [Radford, 1997].

Tuttavia è significativo guardare la funzione esponenziale anche da

[11] Il testo del decreto e una sua spiegazione si trovano, ad esempio, agli indirizzi:
https://www.mef.gov.it/inevidenza/documenti/DM_343_Anatocismo.pdf
https://economiapertutti.bancaditalia.it/informazioni-di-base/anatocismo/?dotcache=refresh.

un'altra prospettiva e considerare il suo grafico. Ciò è utile, ad esempio, per formarsi un'idea della rapidità di crescita della funzione: seguendo il foglio di attività *18*, si può tracciare un sistema di coordinate cartesiane sulla lavagna e *stimare* "quando" il grafico della funzione esponenziale di base 2 esce dalla lavagna, "quando" è sopra l'edificio, "quando" supera la distanza Terra-Sole. Sembra incredibile, ma per $x = 97$ cm il grafico esce dall'universo conosciuto, qualsiasi cosa questo significhi!

Per completare il lavoro, gli studenti disegneranno a matita i grafici della funzione esponenziale sui numeri naturali anche per basi diverse da 2 in scala monometrica, e poi li confronteranno con le rappresentazioni offerte dal foglio di calcolo, che invece spesso adotta in automatico scale diverse sugli assi. È un modo per abituarli ad utilizzare criticamente gli strumenti informatici e ad interpretare le risposte che si ottengono.

Approfondimento. Controintuitivi sono anche i risultati dell'attività *Piegatura*, in cui si investiga se il nome della torta Millefoglie è appropriato e quante volte si può piegare a metà un foglio di carta, anche mediante esplorazioni materiali e con il contributo di alcuni video.

In fondo, a scuola si dovrebbe proprio cercare di andare oltre la conoscenza di senso comune, e farlo mettendosi in gioco in prima persona, *provando*, indagando le ragioni sottese senza accontentarsi di leggerle da un testo. Nel nostro caso ciò significa comprendere davvero cosa vuol dire crescere esponenzialmente e costruire un bagaglio di esperienze su cui contare anche in seguito, ad esempio quando si confronteranno gli ordini di infinito nell'ambito dei limiti.

La funzione esponenziale e la funzione logaritmo

Per le ragioni che abbiamo indicato all'inizio della sezione, è questo il momento di introdurre la funzione logaritmo. È un'altra novità rispetto ai libri di testo e lo si può fare mediante un problema del tipo:

Investi un capitale di 10.000 € al tasso annuale composto del 3%. Dopo quanti anni il suo valore supera per la prima volta i 20.000 €?

Ne parliamo nella dispensa *Esponenziale: costruzione 2*, che riporta una traccia di quanto si può discutere in classe e delle conclusioni a cui si dovrebbe giungere. Precisamente, interpretando la questione sulla ormai usuale tabella relativa alla base 1,03, si considera la riga superiore, si individua su di essa la posizione occupata dal capitale di 20.000 €, si fissa il valore immediatamente successivo nella sequenza dei capitali e si determina sulla riga inferiore il punto, ossia l'anno, che gli corrisponde.

La funzione logaritmo descrive richieste di questo tipo, ed è dunque la funzione che manda *elementi della riga superiore in elementi della riga inferiore.* Non è certo una formulazione rigorosa, ma è quella che gli studenti dovrebbero fare propria ed utilizzare anche per calcolare, ad esempio, $\log_2 8$. È tutt'altra cosa rispetto allo scioglilingua "il logaritmo è l'esponente a cui si eleva la base per ottenere…"; ed è un esempio di rappresentazione che costituisce la *concept image* di logaritmo, nozione che abbiamo esaminato in [Cappello e Innocenti, 2022, sez. 2.3.1] a proposito della pendenza della retta, facendo riferimento a [Baccaglini, Di Martino, Natalini, Rosolini, 2018, pag. 56 e 51].

Poi, naturalmente, questa immagine va precisata dicendo che il logaritmo è la funzione *inversa* della funzione esponenziale.

Anche il logaritmo ha una proprietà caratterizzante. Infatti, se la funzione esponenziale manda somme in prodotti, allora la sua inversa trasformerà prodotti in somme; lo si può leggere direttamente sulla tabella ma lo si può dimostrare anche per via "algebrica", come propongono usualmente i libri di testo. Il legame tra le due proprietà appare con evidenza anche quando si traducono nel linguaggio delle funzioni:

$$\log_2(a \cdot b) = \log_2 a + \log_2 b$$
$$\exp_2(a + b) = \exp_2 a \cdot \exp_2 b$$

È importante discuterne in classe, ed è importante farlo in questi termini, anche per dare ai ragazzi un'idea di cosa sia la matematica moderna, una matematica che si occupa di strutture[12] e non di singoli oggetti, come abbiamo già osservato a proposito della linearità della derivata nella sezione 1.2.4.

La proprietà caratterizzante del logaritmo è anche alla base della costruzione delle tavole dei logaritmi nonché del regolo calcolatore, due strumenti fondamentali nel '600 per svolgere rapidamente i calcoli astronomici necessari per individuare la posizione di una nave in mare. Ora sono stati sostituiti dal computer, ma il regolo calcolatore è stato utilizzato fino a 50 anni fa, ed è stato impiegato addirittura nelle missioni Apollo che hanno condotto l'uomo sulla Luna; inoltre dal punto di vista didattico rimane interessante comprendere come si utilizzano le tavole, e lo si può fare mediante la lettura [Maor, 1994, pag. 19-22].

Mancano da esaminare gli aspetti grafici. Perciò si traccerà il grafico

[12] Le due uguaglianze indicate esprimono il fatto che ciascuna delle due funzioni è un omomorfismo di gruppi. Quello che ci interessa però, al di là del nome, è che gli studenti ne comprendano significato e portata, ossia che esprimono una corrispondenza tra le operazioni di addizione e moltiplicazione.

anche di questa funzione base, per ora sull'insieme numerico che stiamo considerando, e si inizierà a notare la simmetria con il grafico della funzione esponenziale.

Estensioni della funzione esponenziale: costruzioni formative

Come estendere la funzione esponenziale ai numeri interi?

Ne abbiamo già discusso nel percorso relativo alla classe prima, ma vogliamo riprendere brevemente la questione anche mediante un nuovo riferimento, la dispensa *Esponenziale: costruzione 3.* Innanzitutto serve stabilire un *criterio:* conservare la proprietà caratterizzante sugli interi, o, in altre parole, mantenere la regola di spostamento anche *a sinistra* della nostra tabella; ciò significa che spostarsi di un posto a sinistra equivale a sottrarre 1 sulla riga inferiore e a dividere per 2 su quella superiore.

Ma allora resta univocamente determinato il valore di 2^0 e, più in generale, di 2^{-n} per ogni numero naturale n. Questo è il secondo passo e mostra l'aspetto più rilevante dell'intera costruzione: la definizione che abbiamo dato non è arbitraria, ma è conseguenza necessaria di una nostra *decisione*, quella di conservare una proprietà che si ritiene importante. È bene discuterne con gli studenti, come del resto richiedono in generale le Indicazioni nazionali:

> *Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni) […].*

Cambiando registro di rappresentazione, si traccerà poi una porzione del grafico della funzione esponenziale sugli interi negativi e si effettueranno alcune stime, in modo analogo a quanto fatto sui numeri naturali.

L'estensione della funzione esponenziale ai numeri razionali si può giustificare in modo analogo a quella sui numeri interi, pur di generalizzare la regola di spostamento a sottointervalli: spostarsi di (ossia sommare) una quantità h sulla riga inferiore corrisponde a moltiplicare per un fattore q sulla riga superiore; e il numero q dipende solo da h, non dal punto da cui si parte. Nel linguaggio delle funzioni ciò si esprime dicendo che la funzione esponenziale f ha la seguente proprietà:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) \cdot q, \text{ dove } q \text{ dipende da } h, \text{ ma non da } x_0.$$

L'estensione all'insieme dei numeri interi e all'insieme dei numeri razionali comporta anche la possibilità di estendere la funzione logaritmo alla nuova immagine della funzione esponenziale.

Ma… c'è un problema: il grafico della funzione esponenziale sui numeri razionali ha dei "buchi". Ad esempio, la retta di equazione $y = 3$ non interseca il grafico della funzione 2^x in alcun punto, o, in altre parole non esiste alcun numero razionale q tale che $2^q = 3$, come si può dimostrare per assurdo, sfruttando il teorema fondamentale dell'aritmetica. Insomma, non abbiamo ancora definito la funzione logaritmo sul numero 3, che è un numero naturale!

Con ciò speriamo di aver convinto gli studenti che è importante definire la funzione esponenziale anche sui numeri irrazionali. È una questione delicata, ma in questa fase riteniamo sia sufficiente che i ragazzi comprendano l'idea sottesa, ossia approssimare l'argomento con numeri razionali e, di conseguenza, approssimare il valore della funzione con le potenze di tali numeri, come è illustrato nella dispensa *Esponenziale: costruzione 4*.

Approfondimento. Meglio se, oltre a parlarne, gli studenti hanno modo di prendere confidenza con tali aspetti.

Lo possono fare mediante l'attività *Stime sui reali* con il file *StimeSuR.xlsx*, in cui non si richiede di ricavare i valori esatti della funzione – del resto, come si potrebbe? I numeri da valutare nella scheda sono irrazionali –, ma di determinare *esattamente* le loro prime cifre decimali; anzi, iterando il procedimento, si potrebbe ricavare un numero qualsiasi di cifre.

Il lavoro mostra dunque che nell'effettuare stime si ottengono anche certezze e risultati esatti (intervalli in cui cade il valore richiesto); inoltre permette di *approfondire* la conoscenza dei *numeri reali*, ad un livello adeguato per lo studente di scuola secondaria, anche se le Indicazioni nazionali richiedono di più:

[…] lo studente studierà la formalizzazione dei numeri reali.

Ma, come sostiene Villani in [Villani, 2003, pag. 72], un approccio rigoroso ci sembra eccessivo.

Uno sguardo d'insieme

E così abbiamo completato la costruzione della funzione esponenziale e della funzione logaritmo. Abbiamo esaminato molti aspetti e gli studenti potrebbero avere difficoltà ad organizzarli in un quadro unitario e a decidere cosa fissare; pertanto è bene discuterne insieme, magari leggendo il libro di testo e analizzandolo *criticamente*. Ciò significa valutare se le proprietà che propone sono tutte importanti, se le definizioni sono irrinunciabili e se sono formulate in modo adeguato, ma anche se è chiaro il legame tra i contenuti, visto che spesso i manuali forniscono elenchi con l'intento di scrivere "tutto" ma poi il rischio è che allo studente resti poco.

In particolare, riteniamo che sia sufficiente considerare basi maggiori di 1: ad esempio la funzione esponenziale di base $\frac{1}{2}$ si può scrivere, e pensare, come 2^{-x}; ciò non toglie che in alcune situazioni sia più espressivo ricorrere a basi minori di 1, come vedremo nella prossima sezione per il problema del decadimento radioattivo.

Una discussione di questo tipo è già sufficiente, tuttavia, in aggiunta, si può esaminare la dispensa *Funzione esponenziale e logaritmo*, che mostra agli studenti come si possono organizzare gli aspetti più significativi di questo segmento del percorso. È solo un esempio di quanto *loro* stessi dovrebbero realizzare relativamente ad altri temi, e ciò va esplicitato ai ragazzi, altrimenti non si sviluppa la loro l'autonomia e si rischia di comunicare il messaggio distorto che non sono in grado di farlo, come chiarisce la Zan nell'articolo [Zan, 2001] dal titolo eloquente *I danni del "bravo" insegnante*.

Prima di procedere, vogliamo riflettere sul fatto che in questa fase abbiamo lavorato sia sul grafico della funzione esponenziale che sulla tabella. Perché ricorrere a più rappresentazioni? È proprio così importante?

Secondo noi lo è, e se ne trova conferma nelle Indicazioni nazionali, che scrivono relativamente al tema *Relazioni e funzioni* già per il primo biennio:

> *Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.*

Considerazioni analoghe si leggono anche in [Accascina et al., 2006, Introduzione XV], in vista degli studi universitari:

> *Oltre a quelle indicate, che sono conoscenze disciplinari di tipo dichiarativo-proposizionale (indicate talvolta come "sapere"), e di tipo procedurale (indicate talvolta come "saper fare"), l'utilizzatore della matematica deve avere anche altre conoscenze […]. In particolare:*
> *[…]*
> - *deve avere la capacità di cambiare rappresentazioni (grafiche, simboliche, nel linguaggio naturale), di vedere una situazione da più punti di vista, di controllare semanticamente i passaggi formali e di interpretare i risultati di un calcolo.*

L'attenzione a ricorrere a più rappresentazioni si giustifica alla luce delle acquisizioni della ricerca in didattica. Infatti Duval osserva che non si può accedere direttamente agli oggetti della matematica, ma soltanto alle loro *rappresentazioni,* realizzate attraverso un sistema di segni ([Duval, 2005]):

La situazione epistemologica della matematica non è affatto uguale a quella di altri domini del sapere. In matematica non c'è accesso agli oggetti studiati (numeri, funzioni...), all'infuori delle rappresentazioni semiotiche (linguaggi, immagini prodotte per costruzione grafica, schemi...).

Pertanto, per costruire i concetti matematici, è cruciale lavorare sulle rappresentazioni: è opportuno utilizzare più registri e sviluppare l'abilità di passare consapevolmente da uno all'altro, anche perché altrimenti gli studenti potrebbero confondere l'oggetto con la sua rappresentazione. L'aspetto rilevante per noi docenti è che in questa attività l'insegnante ha precise responsabilità, come scrive il ricercatore in [Duval, 1995]:

[...] il coordinamento di registri è la condizione per la padronanza della comprensione [...]. Ora, questo coordinamento non ha niente di spontaneo.

E ora modelli e disequazioni

Gli strumenti così introdotti consentono di esaminare diverse situazioni, come quelle raccolte nel foglio di attività *19*. Datazione con il carbonio-14 e concentrazione di un farmaco nel sangue sono alcuni degli ambiti considerati. *Schemi grafici* e uso della *regola di spostamento* caratterizzano invece l'approccio con cui, in una prima fase, proponiamo di affrontare i quesiti, e per illustrarlo consideriamo un esempio:

Il carbonio ^{14}C ha un periodo di dimezzamento di circa 5730 anni. In un reperto la concentrazione di ^{14}C è il 14% di quella presente negli organismi viventi. Determina l'età del reperto.

L'idea è di rappresentare la questione mediante la usuale tabella della funzione esponenziale, ponendo sulla riga superiore la concentrazione di carbonio e su quella inferiore il tempo. Più nel dettaglio, osserviamo che conviene utilizzare come unità di misura del tempo il periodo di dimezzamento e considerare così la funzione esponenziale di base $\frac{1}{2}$; in questo schema il valore 14% si legge allora sulla riga superiore, e il tempo richiesto dal problema è il numero che gli corrisponde sulla riga inferiore, e dunque è dato da $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}14$.

Come si vede, questo approccio permette di controllare semanticamente ogni passo e consente di trovare una stima del valore richiesto; perciò è bene tenerlo presente anche nel seguito, quando per risolvere il quesito si ricorrerà direttamente ad un'equazione.

Più in generale, non vogliamo che gli studenti si limitino a svolgere calcoli senza interpretare criticamente il testo del problema; non vogliamo che abbiano come unico obiettivo quello di dare la risposta, e si riducano così ad esaminare selettivamente il testo, alla ricerca delle parole chiave e dei dati numerici, arrivando in questo modo a conclusioni stereotipate.

Ad esempio, di fronte ad affermazioni del tipo “In futuro la popolazione mondiale raggiungerà gli […] 11 miliardi nel 2100” [13], i ragazzi vanno stimolati a chiedersi quali sono (alcune del)le assunzioni del modello e a ricercare se ci sono previsioni diverse, su fonti attendibili. Potrebbero trovare delle sorprese, come è avvenuto nel nostro caso; infatti, solo alcuni anni prima, sullo stesso quotidiano si leggeva: “Gli ultimi studi dell’Onu sulla crescita demografica, suffragati dalle analisi di una nuova generazione di esperti, indicano che la popolazione terrestre toccherà l’apice nel 2040 […] fino a stabilizzarsi a quota 5 miliardi nel 2100”[14]. Uno scenario sensibilmente diverso, anche se entrambe le previsioni provenivano dalla stessa autorevole fonte!

Approfondimento. Abbiamo già osservato come la funzione esponenziale modellizzi in modo efficace il decadimento radioattivo. Per rendersene conto si può esaminare il video del Progetto PSSC[15] e si possono svolgere le attività proposte in [Gratton et al., 2006]; anche solo in parte: è già illuminante simulare il fenomeno mediante i dadi.

Restano da affrontare le equazioni e le disequazioni esponenziali e logaritmiche, che preferiamo considerare *contemporaneamente* e non in due segmenti consecutivi del percorso, come del resto abbiamo proposto di fare per ogni aspetto che riguarda le due funzioni.

Nei casi elementari, a cui è dedicato il foglio di attività *20*, l’idea è di adottare l’approccio risolutivo generale alle equazioni e alle disequazioni introdotto nella classe seconda, basato sulla lettura del grafico delle corrispondenti funzioni e illustrato in [Cappello e Innocenti, 2022, sez. 2.3.2]. In particolare dunque, se $a^x - k$ o $\log_a x - k$ compare come numeratore o denominatore o fattore in una disequazione ridotta in forma “normale”, preferiamo determinare il suo *segno* considerando direttamente il grafico della funzione $a^x - k$ o $\log_a x - k$, senza passare alle disequazioni $a^x > k$ o $\log_a x > k$.

Con il metodo acquisito nel primo biennio si può anche discutere il

[13] Dal sito del quotidiano La Repubblica, giugno 2017. La previsione è fornita dall’Onu. https://www.repubblica.it/esteri/2017/06/22/news/onu_la_popolazione_mondiale_aumentera_di_500_milioni_in_cinque_anni-168788850

[14] L’articolo è del 2010 e la previsione era anch’essa fornita dall’ONU: https://ricerca.repubblica.it/repubblica/archivio/repubblica/2010/02/02/sboom-2040-il-mondo-smette-di.html

[15] Physical Science Study Committee. Il video si può trovare all’indirizzo: https://www.youtube.com/watch?v=gryr_MPPTMU

numero delle soluzioni di alcune equazioni, come illustrato in un video[16] che abbiamo realizzato con il Laboratorio DiCoMat. In realtà il filmato non presenta novità sostanziali rispetto a quanto già visto nella classe seconda, ma può servire per richiamare il procedimento risolutivo e le idee sottese, e soprattutto la loro giustificazione nel linguaggio delle funzioni, dettagliata negli approfondimenti che lo accompagnano.

Una base naturale e la derivata

Perché mai agli studenti un numero come $e = 2{,}7182818284...$ dovrebbe apparire "naturale"?

Anche senza approfondire rigorosamente ogni dettaglio, ci proponiamo di guidarli a comprendere come tale base sia, in effetti, "naturale". L'idea è di partire dai grafici delle funzioni 2^x e 3^x e stimare la loro pendenza in $x_0 = 0$, come indicato nell'attività *Base naturale e derivata* e nella dispensa *Base naturale e derivata*. In prima battuta si può osservare che in quel punto la pendenza del grafico di 2^x è minore di 1, mentre la pendenza del grafico di 3^x è maggiore di 1; si può allora affinare l'esplorazione, magari mediante il file[17] *BaseNaturale.ggb*, e arrivare così a *congetturare* che esista una base, compresa tra le due considerate, tale che la pendenza del grafico in $x_0 = 0$ sia proprio 1, o, in altre parole, che la pendenza in $x_0 = 0$ sia uguale al valore della funzione nel punto. In effetti tale base esiste ed è l'unica ad avere la proprietà indicata, e questo riteniamo giustifichi il nome di base *naturale*.

Così abbiamo ricavato presto qualcosa di profondo e di immediata comprensione sulla base e. Certo, non ne abbiamo dimostrato l'esistenza, ma non lo faremmo nemmeno se la definissimo nel modo usuale come $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ oppure come somma di una serie, poiché ci sembra troppo delicato per lo studente della scuola secondaria.

Approfondimento. Volendo, si può andare oltre e cogliere l'occasione per accennare ai numeri trascendenti, come del resto suggeriscono le Indicazioni nazionali:

> *Lo studio [...] di contesti in cui compaiono crescite esponenziali con il numero e, permetteranno di approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti.*

A questo punto il passaggio alla derivata della funzione e^x è

[16] http://laureescientifiche.science.unitn.it/simulazione_risorse/quesito-2.html. Il video, come gli altri analoghi prodotti con il Laboratorio DiCoMat, è accompagnato da una risoluzione scritta e da alcuni approfondimenti per lo studente.
[17] Ispirato da un lavoro di Francesca Arrigoni.

immediato: basta *tradurre* la nostra definizione grafica di e nei termini dell'analisi. Ecco allora che la derivata di e^x in $x_0 = 0$ vale 1, ossia proprio e^{x_0}; di qui, grazie ancora una volta alle proprietà caratterizzante della funzione esponenziale, si può dimostrare che tale uguaglianza vale, in realtà, per ogni x_0.

È un risultato notevole, che permette di determinare in modo efficiente l'equazione delle rette tangenti al grafico della funzione esponenziale, e individuare i punti stazionari e la loro natura, come è richiesto nel foglio di attività *21*, assieme ad altre questioni sulla base naturale.

Sono già molti gli aspetti discussi fino qui nel nostro percorso sull'esponenziale. Per questo è opportuno fermarsi e proporre una verifica sommativa che tenga conto dei punti nodali discussi: un esempio è verifica *5*.

Sviluppi: manipolazioni algebriche, trasformazioni di grafici, dimostrazioni, stime…

Nella prima parte abbiamo esaminato equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche *elementari*, oppure risolubili mediante i grafici delle funzioni base e i loro trasformati. Non serve molto altro in quest'ambito, basta allargare un po' lo sguardo e considerare anche equazioni e disequazioni definite mediante semplici funzioni composte: con ciò intendiamo equazioni riconducibili alla forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ o $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ oppure equazioni che hanno struttura di secondo grado, e le corrispondenti disequazioni.

La loro risoluzione è fondata rispettivamente sull'*iniettività* e sulla *crescenza* delle funzioni esponenziale e logaritmo: è la prima volta che queste due nozioni sono necessarie nel percorso, pertanto questo è il momento di *formalizzarle* e da qui in avanti gli studenti dovranno disporne anche in altri contesti, senza ridursi così a ripetere le indicazioni unicamente operative che propongono spesso i libri di testo.

Esempi significativi dei casi che ci sembra utile considerare si trovano nel foglio di attività *22*, che riporta anche questioni correlate, come la rappresentazione del grafico della funzione $f(|x|)$ a partire da quello di $f(x)$.

Restano da curare alcune ulteriori abilità. Lo si può fare mediante il foglio di attività *23*, in cui si approfondisce l'inversione di formule e dunque la *manipolazione* di espressioni in vista di un obiettivo; è l'occasione per formalizzare, finalmente, anche la nozione di funzione *inversa*, magari attraverso la Situazione di apprendimento *Funzione inversa* del progetto [Orientamat, 2006]. Nel foglio si richiede inoltre di effettuare alcune *stime* senza la calcolatrice, di *dimostrare* semplici uguaglianze tra logaritmi e di *impiegare* in situazioni specifiche le proprietà algebriche della funzione logaritmo introdotte nelle sezioni precedenti.

Al consolidamento invece è rivolto il foglio di attività *24*.

Non è tutto. Dopo aver ricavato la derivata della funzione esponenziale di base *e*, non possiamo non esaminare quella della sua inversa.

La dimostrazione è delicata e non la discuteremo, ma come per le altre funzioni base richiediamo agli studenti di investigare la situazione e di congetturare il risultato. Si partirà dal *grafico* della funzione logaritmo e da questo si dedurrà il grafico qualitativo della funzione derivata, come già discusso in vari esempi nel percorso sulla derivata (sezione 1.2.4); ora, dal solo disegno non è possibile individuare l'espressione richiesta, tuttavia, se si assume che la derivata sia una funzione base, si dovrebbe *congetturare* presto che si tratta di $\frac{1}{x}$.

Modelli logaritmici e scala logaritmica

Approfondimenti.

I logaritmi sono stati introdotti storicamente per velocizzare il calcolo, come abbiamo precisato nelle pagine precedenti, ma, a partire dagli anni '70 del secolo scorso, sono stati definitivamente sostituiti in questo compito dalle calcolatrici. Allora i logaritmi non servono più?

Non proprio. Infatti sono fondamentali per schematizzare situazioni di vario tipo, come ci proponiamo ora di illustrare.

In opportune condizioni, sembra che i logaritmi possano *modellizzare* efficacemente la *percezione* nell'uomo ([Invernizzi, 2022]). Infatti la risposta del nostro corpo agli stimoli esterni spesso non è lineare, ossia non funzioniamo come termometri a liquido, per i quali, se la temperatura aumenta di un grado, allora la lunghezza della colonna di liquido aumenta di una stessa quantità, indipendentemente dal valore iniziale della temperatura.

Ce ne possiamo rendere conto in vari modi. Ad esempio, valutando la nostra sensibilità alle differenze di peso: appoggiamo prima qualche maccherone sul palmo di una mano, mentre sull'altra poniamo un maccherone in più; poi facciamo un'altra prova mettendo un intero sacchetto di maccheroni su un palmo, e un sacchetto con un maccherone in più sull'altro. Pensate che in entrambi i casi si riesca a distinguere su quale mano ce ne sono di più?

Per affinare l'analisi di come varia la *percezione* nell'uomo a seconda dello *stimolo* esterno, possiamo considerare l'ambito dell'acustica: si parla in tal caso rispettivamente delle grandezze livello sonoro e intensità dell'onda. Il loro legame si può descrivere dicendo che il livello sonoro aumenta di un'unità quando l'intensità acustica viene moltiplicata per 10 ([Frova, 1999, pag. 76 e cap. 5]); allora perché non rappresentare la corrispondenza mediante la tabella della funzione esponenziale di base 10, come del resto abbiamo proposto nel foglio di attività 23? Lo schema grafico permette infatti di risolvere in modo espressivo varie questioni che invece i libri di testo di fisica spesso affrontano solo mediante manipolazioni algebriche[18]. Ad esempio:

Determina quanto varia l'intensità dell'onda quando il livello sonoro aumenta di 3 bel.

Il logaritmo è utile anche per *rappresentare* in modo espressivo particolari insiemi di dati numerici. Ciò avviene mediante la *scala logaritmica,* come illustrato nell'attività *Scala logaritmica*, un percorso guidato che lo studente può affrontare autonomamente – e così sviluppare abilità trasversali, quali interpretare un testo, valutare come impiega ciò che sa per apprendere cose nuove – e poi discutere in classe con i compagni e il docente.

Lo strumento si può mettere subito alla prova impiegandolo per schematizzare il raffreddamento di un corpo, magari mediante l'attività[19] *Raffreddamento* con i file *Raffreddamento1.ggb* e *Raffreddamento2.ggb*. Ma è interessante far notare ai ragazzi che interviene anche nella rappresentazione delle note musicali sul pentagramma: infatti, la posizione di una nota è determinata sostanzialmente dal *logaritmo* della sua frequenza; se ne parla in [Maraschini e Palma, 2002, pag. 134], un testo ricco di spunti e per molti aspetti un ottimo riferimento per costruire percorsi didattici.

1.2.6 Un po' di geometria sintetica dello spazio

Perché affrontare a scuola la geometria sintetica dello spazio?

Le ragioni sono essenzialmente due. La prima è chiaramente espressa da Villani in [Villani, 2006, pag. 59]:

Viviamo nello spazio tridimensionale.

Ed è precisata nella pagina successiva:

[…] l'insegnamento della geometria razionale del piano e dello spazio si prefigge due obiettivi fondamentali: […]
(II). Fornire uno strumento concettuale atto a descrivere, comprendere la realtà nella quale viviamo e a formalizzare le procedure che utilizziamo per intervenire su di essa.

---

[18] Indicano infatti di ricorrere alla nota formula che definisce il *bel*, un'unità di misura del volume sonoro. Precisamente, detta I l'intensità dell'onda sonora, espressa nel S.I. e $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$, il *bel* è dato da $\log_{10}\frac{I}{I_0}$.

[19] Ispirata al lavoro di tesi di Chiara Tomaselli.

[…] il secondo obiettivo implica necessariamente una conoscenza (almeno a grandi linee) della geometria dello spazio.

Inoltre, talvolta questioni di geometria dello spazio si incontrano in varie discipline, dal disegno tecnico, alla fisica, alla chimica.

Quali aspetti esaminare?

Il tema è molto vasto, pertanto si dovranno compiere delle scelte. La nostra idea è di non limitarsi a calcolare volumi e aree, ma di privilegiare la *visualizzazione* spaziale e l'*interpretazione* di figure, tenendo conto, naturalmente, di quanto prevedono le Indicazioni nazionali:

Lo studio della geometria piana proseguirà con l'estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, saranno studiate le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità, nonché le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare poliedri e principali solidi di rotazione).

In realtà alcuni di questi aspetti sono già intervenuti nel nostro percorso, anche se in modo non sistematico: nell'ambito delle figure simili, della trigonometria (abbiamo considerato, ad esempio, l'angolo tra la diagonale del cubo e quella di una sua faccia) e nei problemi di ottimizzazione (in particolare, abbiamo esaminato solidi inscritti nella sfera o nel cono).

Oggetti e relazioni nello spazio

In questa prima fase proponiamo da una parte di investigare se gli oggetti già esaminati nel piano si comportano in modo diverso quando sono collocati nello spazio e dall'altra di introdurre nuovi oggetti geometrici.

Vediamo più nel dettaglio gli aspetti che secondo noi vanno discussi con gli studenti.

- *Assioma di appartenenza relativo al piano.*
  Ossia tre punti non allineati appartengono ad un unico piano. È un fatto che sarà utile anche più avanti, nell'ambito della geometria analitica dello spazio, per determinare con maggior consapevolezza l'equazione del piano che passa per alcuni punti assegnati.

- *Parallelismo nello spazio.*

  Basta che due rette non abbiano punti in comune per concludere che sono parallele?

Per esplorare la situazione conviene fare delle prove con due bastoncini e magari costruire un cubo di carta ed esaminare come sono disposti gli spigoli. Entrambi sono strumenti efficaci per investigare il problema e lo sono anche per analizzare questioni analoghe, tuttavia si deve fare attenzione a *non ridurre* i segmenti ai bastoncini, come ricorda Lucio Russo in [Russo, 1998, pag. 32 e 105]:

Le sostituzioni di segmenti con bastoncini cominciano ad avere effetto, convincendo gli studenti dell'inutilità degli enti teorici. Ho rabbrividito ascoltando, da uno studente […] l'argomento che la geometria è falsa poiché non esistono veri segmenti, in quanto tutto ha uno spessore. […]

La scienza consiste nella formulazione di "teorie" per spiegare "i fatti". Chiunque si opponga all'uso di concetti teorici in nome della concretezza conduce quindi una battaglia contro il metodo scientifico.

Per questa ragione è opportuno discutere con i ragazzi il *ruolo* che hanno i modelli materiali nella geometria solida, che poi è lo stesso che hanno i disegni nella geometria piana: sono *rappresentazioni* degli enti geometrici, ma, per quanto espressive, *non sono* gli enti geometrici; sono utili riferimenti per esplorare e per comprendere, ma poi si devono abbandonare per pensare in termini generali ed astratti.

- *Perpendicolarità nello spazio.*

  Nel piano, data una retta ed un suo punto, esiste un'unica perpendicolare che passa per quel punto; nello spazio vale ancora questo risultato?

  Anche in questa situazione conviene far riferimento ad oggetti materiali, e pure al software con l'attività descritta nel file *RettePerpendicolari.ggb*.

  Quali risultati teorici giustificano i procedimenti utilizzati spesso dai muratori per stabilire se il pavimento è orizzontale oppure se uno spigolo è perpendicolare ad un dato piano?

  Ne discute Villani in [Villani, 2006, pag. 65]. I muratori appoggiano una livella in due direzioni diverse nella prima situazione, mentre nella seconda utilizzano due squadrette e dispongono un cateto di ciascuna lungo lo spigolo. Entrambi i procedimenti si fondano sul fatto che se due rette sono perpendicolari ad una retta r in uno stesso punto, allora il piano individuato dalle prime due rette è perpendicolare ad r.

- *Prismi, piramidi, solidi di rotazione.*
  Per esaminare questi solidi basta introdurre poche *definizioni*, ad esempio quella di piramide retta, poiché poche sono quelle che servono davvero per rendere più chiara la comunicazione in classe. Peraltro diverse formalizzazioni sono articolate, e, provando a semplificarle, si rischia di ottenere versioni imprecise, come abbiamo già osservato a proposito della definizione di angolo nella classe prima in [Cappello e Innocenti, 2022, pag. 48]. Piuttosto i ragazzi dovrebbero avere in mente alcune rappresentazioni di tali solidi, saperle tradurre in un disegno (in modo *critico*, per non ridurre i segmenti a bastoncini), e disporre delle loro caratteristiche fondamentali; ad esempio, non serve conoscano una definizione rigorosa di prisma, ma devono sapere che in un prisma le basi sono uguali e parallele.
  Per ragioni analoghe è opportuno limitarsi a pochi *risultati*. L'uguaglianza degli apotemi nella piramide retta è uno di questi, e lo si può ricavare mediante una giustificazione informale. Invece, anche se compare su ogni libro di testo, non introdurremmo il teorema delle tre perpendicolari, poiché si utilizza per dimostrare la perpendicolarità tra rette in situazioni in cui spesso possiamo accontentarci dell'intuizione, e per gli studenti è difficile comprenderne il senso e la portata.

  Proseguendo nel nostro esame dei solidi, ci si può chiedere:

  Quali figure si ottengono ruotando rettangoli, triangoli, semicirconferenze attorno ad un asse?

  Ecco come si possono introdurre i solidi di rotazione; naturalmente si dovrà poi lasciare… spazio alle prove degli studenti e alla discussione. E con questi abbiamo indicato tutti gli oggetti della geometria solida che ci sembrano irrinunciabili.

  <u>Approfondimento</u>.

  C'è una relazione tra il numero degli elementi caratteristici dei poliedri, ossia tra il numero di facce, di vertici e di spigoli?

Si può provare a congetturarla iniziando con l'esaminare alcuni esempi di solidi. La dimostrazione della formula, nota come *formula di Eulero*, è impegnativa e si può omettere; piuttosto è significativo discutere il *processo* storico di costruzione e di validazione della formula, che è paradigmatico di come si sviluppa la matematica. Come illustrato in [Lakatos, 1979], si assiste al ripetersi ciclicamente di varie fasi: la produzione di congetture – nate dall'esame di casi specifici –, i tentativi di dimostrazione, le confutazioni della validità della dimostrazione o dell'enunciato – mediante opportuni controesempi –, e le successive revisioni della teoria, in particolare delle definizioni. Merita discuterne con gli studenti.

Il testo ha poi un ulteriore motivo di interesse per il docente, visto che propone una chiara critica alla didattica tradizionale, come a pag. 185:

> *La metodologia euclidea ha sviluppato un certo stile di presentazione obbligatorio. Vi farò riferimento come "stile deduttivista". [...] Lo studente di matematica è costretto a seguire questo gioco di prestigio, senza fare domande né sui precedenti né su come questo gioco viene eseguito. [...] La matematica è presentata come un insieme sempre in crescita di verità eterne ed immutabili. Controesempi, confutazione e critica non vi possono mai entrare. [...] sono eliminate la congettura primitiva, le confutazioni e la critica della dimostrazione. Lo stile deduttivista occulta la lotta, occulta l'avventura.*

In sintesi, presentare solo la sistemazione finale di un argomento fornisce un'idea distorta della matematica e la riduce ad una vuota sequenza di definizioni e teoremi.

Oltre alla formula di Eulero, è interessante approfondire i poliedri regolari.

Per iniziare si possono osservare alcuni modelli materiali di tali solidi. Poi si può dimostrare che ne esistono *al più* cinque: il procedimento è significativo e fornisce un ulteriore spunto per riflettere con gli studenti sul significato e sul ruolo della *dimostrazione*; infatti non proponiamo di dimostrare l'esistenza di tali solidi (la prova per via sintetica è articolata), ma solo il fatto che, *se* esistono, non possono essere più di cinque.

Eppure non è solo una questione strettamente matematica: la lettura *Poliedri regolari* mostra che i solidi platonici intervengono in vari ambiti, dalla filosofia alla chimica, dalla biologia all'arte; e che il pallone da calcio, almeno quello in uso tra il 1968 e il 2006 nelle partite ufficiali, è un modello di solido semiregolare. Non si tratta di semplici curiosità, ma di situazioni ricche e significative, che contribuiscono a formare una visione più completa della matematica e della cultura, e pertanto vanno esaminate in profondità, invitando gli studenti a comprendere le *giustificazioni* sottese, senza fermarsi a guardare unicamente le figure.

Area della superficie e volume

È un tema che di solito si affronta già nella scuola secondaria di primo grado. Al liceo è opportuno considerare nuovamente alcuni aspetti per analizzarli più in profondità, e passare dall'approccio intuitivo, caratteristico del primo ciclo, a quello razionale, almeno in alcuni casi significativi. Cosa esaminare e come farlo è quanto ci proponiamo di indicare brevemente di seguito.

- *Prisma.*
  Le formule del volume e dell'area sono quelle che ci si aspetta. Per la prima basta una giustificazione intuitiva, che si basi su una versione informale del principio di Cavalieri, ma senza applicarlo rigorosamente: preferiamo approfondire risultati più significativi.

- *Piramide.*
  Per studiare il volume della piramide è illuminante suddividere il cubo in tre piramidi uguali e lo si può fare anche materialmente, seguendo l'attività *Dall'esplosione del cubo al volume della piramide* con il file[20] *EsplosioneCubo.ggb*.
  Naturalmente l'obiettivo del lavoro è congetturare la formula che fornisce il volume della piramide e, soprattutto, provare a *giustificarla*. Nel nostro caso, in sostanza, si tratta di spiegare perché le tre piramidi ricavate dall'esplosione sono uguali: si può osservare, ad esempio, che sono uguali le basi, dato che sono facce del cubo, e che i vertici sono "posti ugualmente" rispetto alle basi, visto che le altezze delle piramidi sono anche spigoli del cubo.
  Un approccio analogo è proposto in [Lang, 2015] e prevede di suddividere il cubo in 6 piramidi uguali con base una faccia del cubo e con vertice il centro del cubo. Come il precedente, non è relativo alla generica piramide, ma, come il precedente, è indubbiamente più espressivo e formativo di quello tradizionale, che si basa invece su una costruzione delicata e difficile da visualizzare.
  Piuttosto di considerare il caso generale preferiamo ricavare la formula del volume del tronco di piramide in funzione dell'area delle basi e dell'altezza del solido. Le ragioni sono più di una, ma la principale è che il procedimento sfrutta un importante risultato sulle piramidi simili nello spazio, che mette in relazione triangoli posti su *piani diversi*, e dunque riguarda una situazione propria della geometria solida: si tratta dell'uguaglianza del rapporto tra le altezze e del rapporto tra due qualsiasi lati corrispondenti delle loro basi.

- *Cilindro e cono.*
  "Metterci le *mani"* e poi *giustificare* razionalmente è ancora una volta quanto ci proponiamo di fare. In sostanza, si tratta di sviluppare la superficie laterale del cono e accorgersi che si ottiene un settore di cerchio; meglio ancora se lo sviluppo viene eseguito anche materialmente, tagliando lungo un apotema. Il cilindro si può esaminare in modo analogo.

[20] Realizzato da Michele Avancini.

- *La sfera e il principio di Cavalieri.*
  C'è un problema: mentre nel piano due poligoni hanno la stessa area se e solo se sono equiscomponibili, nello spazio due poliedri possono avere lo stesso volume senza per questo essere equiscomponibili. È una questione rilevante, legata ad uno dei celebri problemi[21] posti da Hilbert al Congresso internazionale dei matematici (ICM) che si è tenuto a Parigi nel 1900. Tuttavia ciò che qui più ci interessa è che l'affermazione iniziale ha, purtroppo, una precisa conseguenza: per ricavare il volume dei solidi non si può utilizzare sempre l'equiscomposizione, come invece avviene nel piano, ma si deve ricorrere ad altri approcci; ad esempio, al *principio di Cavalieri*. Mediante questo strumento si può ricavare, ad esempio, la formula del volume della sfera confrontando le sezioni di un cono equilatero con quelle della "scodella di Galileo", cioè un cilindro equilatero meno una sfera dello stesso diametro; per esplorare la situazione si può ricorrere al software con l'attività descritta nel file *Scodella.ggb*. In aggiunta si può osservare che l'area della superficie sferica è uguale all'area della superficie laterale del cilindro circoscritto; un risultato significativo, al punto da essere raffigurato nel logo dell'UMI in uso prima dell'attuale!

Oltre a discutere le diverse questioni illustrate in questa sezione si considereranno semplici problemi sul calcolo di lunghezze, aree e volumi, ancora una volta con l'obiettivo prioritario di sviluppare abilità quali l'interpretazione di figure e la visualizzazione spaziale. Se ne trovano su ogni libro di testo e noi ne proponiamo alcuni nel foglio di attività *25*.

Invece un esempio di verifica su questi aspetti e anche sulla parte finale del percorso sulla funzione esponenziale e logaritmo è verifica *6*.

1.2.7 Statistica: sviluppi

Rappresentare dati, elaborarli ed analizzarli sono attività significative e molto importanti per comprendere il *mondo* in cui viviamo. Lo abbiamo già osservato nel percorso relativo al primo biennio ([Cappello e Innocenti, 2022, sez. 2.2.6]), in cui ci siamo occupati degli aspetti elementari della statistica descrittiva, ossia della rappresentazione dei dati

---

[21] Si tratta del terzo problema e una sua formulazione è questa:
Trovare due tetraedri di basi uguali e uguali altezze che non possano in alcun modo essere scomposti in un numero finito di tetraedri congruenti, né possano essere combinati con un numero finito di tetraedri congruenti a formare due poliedri che possano essere a loro volta scomposti in un numero finito di tetraedri congruenti.

mediante frequenze relative e cumulate nonché mediante istogrammi e aerogrammi, e della sintesi dei dati attraverso valori di posizione – media e mediana – e di dispersione – distanza interquartile e schematizzazione mediante box-plot.

Correlazione e retta di regressione

Nel secondo biennio le Indicazioni nazionali prevedono per la statistica obiettivi specifici di apprendimento piuttosto impegnativi:

> *Lo studente, in ambiti via via più complessi, il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti, apprenderà a far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione.*

Noi proponiamo di focalizzare l'attenzione sulla *correlazione* tra due grandezze e sulla *retta di regressione*. In sostanza si tratta di esaminare due questioni.

- Provare a stabilire *se c'è una relazione* tra due grandezze relative agli individui di una popolazione, ad esempio tra la statura e il peso, oppure relative agli stati che può assumere un sistema, ad esempio tra l'intensità della corrente e la differenza di potenziale in un resistore.

- Se si presume che una qualche relazione ci sia, siamo interessati a *modellizzarla* mediante un'opportuna funzione.
  Ora, in varie situazioni, o comunque almeno in prima battuta, è ragionevole farlo mediante una funzione della forma $y = f(x) = ax + b$, dove x e y sono le due grandezze in esame; la domanda diventa allora: tra tutte le funzioni di tale tipo, qual è quella che decidiamo essere il miglior modello della dipendenza tra le due grandezze? Il grafico della funzione ottimale è la *retta di regressione.*
  Così si introduce anche un nuovo indice di dispersione, la *varianza*, visto che interviene nell'equazione di tale retta, e si potrà accennare alla deviazione standard, citata nelle Indicazioni nazionali.

Tali questioni, a nostro avviso, vanno proposte in classe senza addentrarsi troppo in dettagli tecnici, ma discutendo le idee di base in modo che gli studenti possano da una parte prendere confidenza con alcuni strumenti elementari e dall'altra costruire una rete di conoscenze e abilità su cui fondare gli approfondimenti che magari faranno in futuro.

Un percorso

Per iniziare si può discutere un problema come quello proposto nell'attività *Correlazione Rifiuti* con il file *CorrelazioneDatiRifiuti.xlsx*, o altri analoghi i cui dati sono raccolti dagli studenti stessi, magari in laboratorio di fisica.

Considera la quantità di rifiuti pro-capite e il PIL pro-capite nella provincia di Trento relativi ad alcuni anni (fonte ISPAT[22]).
- Secondo te, c'è una relazione tra le due grandezze?
- Se sì, di che tipo? Prova a precisarla.

Come sempre, i ragazzi vanno lasciati liberi di esplorare la questione e di discuterla tra loro. Dal confronto dovrebbero però emergere alcuni aspetti importanti: è utile rappresentare i dati nel piano cartesiano; se due grandezze sono dipendenti non significa necessariamente che una sia la causa dell'altra; non si tratta di individuare la funzione "giusta" che esprime la dipendenza tra le due variabili, ma di fare alcune scelte e, a partire da queste, costruire *una* funzione che modellizzi la situazione, ed è una *nostra decisione* che lo faccia; non ha senso che il grafico della funzione passi esattamente per i dati, visto che questi sono soggetti a *rumore*, ossia a variazioni in parte dovute al caso; il modello può servire anche per fare *previsioni*, ad esempio a congetturare ulteriori coppie di valori delle due grandezze.

Dopo questa fase esplorativa si può esaminare più in generale la questione e osservare alcune "nuvole" di dati, ossia rappresentazioni nel piano cartesiano di insiemi di coppie (x_i, y_i), dove x_i e y_i sono i valori delle due grandezze assunti dall'i-esimo individuo della popolazione, come è proposto in [Villani, 2007, pag. 232]. In alcuni casi si scorgeranno delle regolarità, ad esempio che al crescere dei valori di una grandezza anche i corrispondenti valori dell'altra tendono ad aumentare, ma in altri non si noterà alcun legame; ecco allora che, per effettuare una prima distinzione tra le diverse configurazioni, si introdurrà la *covarianza* tra le variabili statistiche, e si potrà giustificarne la definizione mediante considerazioni analoghe a quelle esposte in [Sasso, 2020, pag. 19].

Presa confidenza con la situazione, si può tornare al problema ini-

[22] https://statweb.provincia.tn.it/annuario/(S(4ktfcpbkd23qdbif4tuun5ec))/default.aspx?t=ss&f=0
I dati sono riportati nel file CorrelazioneDatiRiufiuti.xlsx. La situazione è stata suggerita da Marica Valente.

ziale e precisare l'analisi dei dati, provando a costruire una funzione che modellizzi la relazione tra le due grandezze.

Come dicevamo, in varie situazioni o almeno in prima approssimazione, è ragionevole considerare una funzione della forma $y = f(x) = ax + b$; ma come determinare i parametri a e b? Un criterio per farlo è quello noto come *metodo dei minimi quadrati*, che si basa sull'idea di considerare, per ogni dato, la differenza tra il valore misurato y_i e il valore $f(x_i)$ previsto dal modello, e di considerare poi come *errore complessivo* la somma dei quadrati dei singoli errori, ossia $\sum_i(y_i - f(x_i))^2$: la funzione ottimale f è quella per cui è minimo l'errore complessivo.

Per ricavare il valore di a e b si farà ricorso al foglio di calcolo, piuttosto in classe è importante discutere il significato di tale funzione e il procedimento sotteso.

Un modo alla portata degli studenti della scuola secondaria è osservare innanzitutto che tale retta passa per il baricentro dei dati, ossia per il punto (m_X, m_Y), le cui coordinate sono rispettivamente la media aritmetica dei dati x_i e dei dati y_i; è un fatto ragionevole, ma è bene ricordare ai ragazzi che lo si può dimostrare, anche se in classe non lo facciamo. Per semplificare ulteriormente la procedura conviene considerare prima il caso in cui il baricentro (m_X, m_Y) è nell'origine (0, 0): la funzione da minimizzare diviene allora $\sum_i(ax_i - y_i)^2$, che è una funzione polinomiale di secondo grado nella *sola variabile a*, della quale si può trovare il punto di minimo anche senza ricorrere alla derivata, ottenendo così $a = \frac{\sum_i x_i^2 y_i^2}{\sum_i x_i^2}$. La formula generale per la pendenza della retta di regressione si ricava infine traslando i dati in modo che il nuovo baricentro sia l'origine, ossia considerando i dati $(x_i - m_X, y_i - m_Y)$, e applicando ad essi la formula relativa al caso speciale appena esaminato[23].

In definitiva si ottiene $a = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}$, dove $\mathrm{cov}(X, Y)$ è la covarianza tra la sequenza di dati $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e la sequenza di dati $y_1, y_2, \ldots, y_n$, mentre σ_X^2 è la varianza dei dati $x_1, x_2, \ldots, x_n$; ci sono ora tutti gli elementi che servono per scrivere l'equazione della retta di regressione, visto che si conosce la sua pendenza a ed un suo punto, il baricentro dei dati.

Con questi strumenti si può rispondere alle domande poste nel problema iniziale. Il calcolo effettivo dell'equazione della retta di regressione

[23] Infatti la *pendenza* della retta di regressione relativa ai dati iniziali (x_i, y_i) è uguale alla pendenza della retta relativa ai nuovi dati $(x_i - m_X, y_i - m_Y)$, visto che si ottengono dai primi mediante una traslazione. Si ha così $a = \frac{\sum_i(x_i - m_X)^2 (y_i - m_Y)^2}{\sum_i(x_i - m_X)^2}$.
Infine osserviamo che, per definizione di covarianza, il numeratore di tale espressione è uguale alla covarianza tra i dati x_i e i dati y_i, e, per definizione di varianza, il denominatore è uguale alla varianza dei dati x_i.

e la sua rappresentazione grafica vanno demandati al foglio elettronico, come è mostrato nel file *CorrelazioneRifiuti.xlsx*; tuttavia si può ricorrere anche ad un software, magari in collaborazione con il docente di informatica.

Un'attività analoga è *Correlazione voti* con il file *CorrelazioneEsameDati.xlsx*, *CorrelazioneEsame.xlsx*, e un'altra ancora è illustrata in un video[24] che mostra come si può esaminare il legame tra età e durata della degenza in ospedale di pazienti ricoverati per infezione da Covid-19, basandosi su un caso di studio.

Approfondimento. Volendo si può discutere come misurare il *grado* di correlazione tra due variabili. L'idea è di partire dalla covarianza e dividere per il suo valore massimo (ma si può anche pensare di partire dalla pendenza della retta di regressione e simmetrizzarla rispetto alle due variabili), e introdurre così la quantità $\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$, che si chiama *coefficiente di correlazione*[25]. Per quanto osservato prima a proposito della covarianza, esso è proprio una misura del legame tra le variabili considerate.

Tale coefficiente è un valore compreso tra –1 e 1, poiché si può dimostrare che vale $-\sigma_X\sigma_Y \leq \mathrm{cov}(X,Y) \leq \sigma_X\sigma_Y$. E precisamente, se è vicino a 1 oppure a –1 si ritiene che ci sia qualche dipendenza fra le variabili, mentre se in modulo è minore di 0,5 si ritiene che la dipendenza di solito sia piccola.

Precisati questi aspetti, gli studenti possono tornare ad esaminare i problemi discussi nelle attività precedenti e approfondirne l'analisi, calcolando mediante il foglio elettronico il coefficiente di correlazione.

Quanto discusso fino a qui nel capitolo costituisce, a nostro avviso, ciò che merita affrontare nella classe terza. Per il lavoro estivo proponiamo la lettura *Letture classe terza* e il foglio di attività *26*, che riporta le questioni nodali affrontate nel corso dell'anno scolastico e di cui è bene disporre a lungo.

[24] Il video è stato realizzato da Laura Ventura dell'Università di Padova: https://www.youtube.com/watch?v=zNERNwVoJAw

[25] Precisamente coefficiente *di Pearson*.

1.3 Un percorso in sintesi

Nei paragrafi precedenti abbiamo illustrato le scelte didattiche che ci sembra opportuno compiere per la classe terza e abbiamo mostrato come si possono declinare in un percorso annuale. Ci proponiamo ora di fornire un rapido sguardo d'*insieme* sulla nostra proposta, e lo faremo mediante una tabella che riporta i contenuti e le modalità nonché un'indicazione di massima dei tempi richiesti per affrontare tali aspetti.

Lo schema può servire al docente per progettare il *proprio* percorso, poiché per compiere scelte efficaci, oltre a fissare criteri generali per decidere cosa proporre e come farlo, è opportuno tener presente l'*intera* programmazione: diversi contenuti, infatti, non sono significativi in sé, ma lo diventano o meno a seconda di quanto si intende affrontare nell'arco del quinquennio o almeno di un anno scolastico. Ad esempio, se si decide di anticipare la derivata alla classe terza, allora in geometria analitica non si adotterà il classico approccio "discriminante nullo" per calcolare la pendenza della retta tangente, sia per ragioni di tempo sia perché è più efficace ricorrere al nuovo strumento introdotto; così si perde un'occasione per operare con i parametri, ma si potrà farlo più avanti e proprio nell'ambito del calcolo differenziale, che del resto è un contesto che sembra motivare di più gli studenti.

La sintesi che proponiamo si basa sulla nostra esperienza, sulle *sperimentazioni* effettuate in numerose classi e sulle riflessioni che ne sono seguite, ma non vuole in alcun modo essere un modello da adottare in ogni dettaglio. Anzi, ci auguriamo che, come l'intero volume, sia utile al docente per riflettere e chiarire il proprio pensiero, ma per effettuare poi le *proprie* scelte e costruire il *proprio* percorso; la nostra proposta è solo un esempio di *come* lo si può fare, e, prima ancora, la prova che lo si *può* fare.

Considerando aspetti più pratici, lo schema prevede che siano già stati esaminati gli aspetti principali del percorso relativo al primo biennio, sintetizzato in [Cappello e Innocenti, 2022, sez. 2.4]; in particolare, la *retta* nel piano cartesiano a partire dalla nozione di pendenza, le *funzioni* e i *grafici* per interpretare equazioni e disequazioni e per modellizzare, nonché la funzione polinomiale di secondo grado. Sono prerequisiti fondamentali e vanno eventualmente recuperati nel corso dell'anno scolastico, posticipando magari alla classe quarta alcuni contenuti previsti per la classe terza, ad esempio alcune parti della derivata, oppure tralasciando gli approfondimenti.

La tabella è suddivisa in *blocchi,* ossia parti elementari del percorso, ciascuno dei quali corrisponde ad una specifica sezione del paragrafo 1.2 in cui è esaminato: precisamente il blocco *1. Geometria analitica* è illustrato nella sezione 1.2.1, il blocco *2. Coniche: uno sguardo* nella sezione 1.2.2...

Nella colonna destra sono riportati i tempi, che comprendono le *verifiche* e prevedono un impegno annuale complessivo di 120 unità orarie di lezione[26]; la stima si basa sull'ipotesi di disporre di 4 unità orarie a settimana – secondo quanto stabilisce la normativa per i Licei scientifici – e sulla considerazione che alcune di esse vengono impiegate in attività quali uscite didattiche, assemblee studentesche o progetti.

CONTENUTI e MODALITÀ	***TEMPI*** *(unità orarie)*
1. Geometria analitica	
Contesto storico e culturale in cui si è sviluppata la geometria analitica. Curve nel piano cartesiano: richiami sull'appartenenza di un punto ad una curva di equazione data, intersezioni con rette, simmetrie; dal luogo all'equazione; applicazioni (cissoide e duplicazione del cubo, cardioide e microfoni…). Espressività della geometria e potenza dell'algebra.	*5*
Equazione della circonferenza nella forma $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ *e completamento dei quadrati; circonferenza per tre punti anche mediante l'intersezione di due assi; intersezioni con rette; equazione della retta tangente alla circonferenza in un suo punto mediante la perpendicolarità del raggio. Semplici questioni risolte sfruttando anche proprietà sintetiche (ad esempio, distanza del centro da una corda).* *Descrizione di sottoinsiemi del piano per mezzo di disequazioni.*	*12*
2. Coniche: uno sguardo	
Visualizzazione delle sezioni del cono; dall'interesse speculativo alle applicazioni nell'arte, in astronomia, nelle costruzioni…	*2*
Ellisse come luogo geometrico, costruzione anche materiale della curva, relazione tra distanza focale e lunghezza degli assi. Equazione dell'ellisse; eccentricità, ellisse	

[26] Nella sperimentazione del percorso nelle nostre classi ogni unità oraria è di 50 minuti.

come dilatazione della circonferenza, giustificazione della formula dell'area del sottoinsieme del piano delimitato dall'ellisse. Orbite, proprietà focali di riflessione ed applicazioni tecnologiche (ad esempio, volte ellissoidali). *Equazione della parabola con asse di simmetria verticale, parabola per tre punti, cenni alle proprietà focali di riflessione.* *Interpretazione di grafici di funzioni come (parti di) coniche: funzione $\sqrt{a^2 - x^2}$, in casi semplici estensione dell'approccio risolutivo alle equazioni e disequazioni sviluppato nel primo biennio. Facciamo il punto sulle equazioni irrazionali: controllo delle soluzioni per sostituzione, analisi dell'equivalenza delle equazioni che si ottengono elevando al quadrato o al cubo.*	*10*
3. Trigonometria del triangolo	
Misura degli angoli in radianti. *Richiami sulla definizione di tangente, seno e coseno nel triangolo rettangolo. Relazioni fondamentali* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ *e* $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$. *Teorema del coseno e modulo della somma di vettori, distanze topografiche… Interpretazione di figure nel piano e nello spazio e determinazione degli elementi incogniti; latitudine e longitudine.*	*6*
4. Derivata: un primo approccio	
Problemi di massimo e minimo, pendenza della retta tangente al grafico di una funzione; approssimazioni della pendenza mediante il righello e mediante il software.	*5*
Definizione di derivata, interpretazione in vari contesti (velocità, costo marginale…), derivata come tasso di variazione istantaneo di una funzione. Motivi che hanno condotto alla nascita del calcolo differenziale nel XVII secolo. Aspetti di calcolo: derivata delle funzioni potenza, linearità della derivata. Applicazione all'equazione delle rette tangenti e alla cinematica.	*12*
Funzione derivata; crescenza (decrescenza) di una funzione e segno della derivata, massimi (minimi) di una funzione e zeri della derivata, natura dei punti stazionari: una giustificazione informale. Risoluzione di semplici problemi di ottimizzazione mediante lo strumento derivata, in particolare nell'ambito della geometria piana e solida.	*10*

Ulteriori aspetti di calcolo: formule del prodotto e del quoziente di funzioni; utilizzo per abbozzare il grafico di funzioni razionali e irrazionali elementari. *Famiglie di funzioni al variare di uno o più parametri e condizioni sulla pendenza del grafico.*	*8*
5. Funzione esponenziale e logaritmo	
Modelli esponenziali (capitalizzazione composta, decadimenti…) e confronto con i modelli lineari (capitalizzazione semplice). *Funzione esponenziale sull'insieme dei numeri naturali: richiami sulla proprietà caratterizzante $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ ed interpretazione come "regola di spostamento", grafico e stime. Funzione logaritmo come inversa dell'esponenziale, corrispondenti proprietà algebriche.* *Estensione delle funzioni esponenziale e del logaritmo ai numeri interi, ai razionali e (cenni) ai reali. Formula del cambiamento di base e determinazione di valori approssimati con la calcolatrice.*	*8*
Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche elementari: interpretazione mediante le funzioni e i grafici, stima delle soluzioni. Esame di modelli esponenziali mediante i nuovi strumenti sviluppati.	*10*
Una base naturale: dalla pendenza del grafico al numero e, cenni ai numeri trascendenti. *Proprietà caratterizzante e giustificazione della derivata della funzione e^x; derivata della funzione $\ln x$ (giustificazione grafica).*	*3*
Semplici equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche costruite con funzioni composte; dal grafico di una funzione f al grafico di $f(-x)$ e $f(\|x\|)$. Definizione di funzione inversa, iniettiva, crescente (decrescente). *Dimostrare semplici uguaglianze utilizzando le proprietà dei logaritmi.*	*12*
Approfondimenti: logaritmo e percezione dei sensi nell'uomo, intensità sonora e volume sonoro; dai dati al modello, scala logaritmica.	*5*
6. Geometria sintetica dello spazio	
Assioma di appartenenza relativo allo spazio. Parallelismo e perpendicolarità di rette nello spazio, applicazioni in edilizia.	

Prismi, piramidi, solidi di rotazione; uguaglianza dei rapporti tra le altezze e tra i lati delle basi di piramidi ottenute mediante sezioni parallele alla base. *Volumi e aree delle superfici dei principali solidi: "esplosione" del cubo (anche con modelli materiali) e volume della piramide, sviluppo piano del cono e area della superficie laterale, principio di Cavalieri e dimostrazione della formula del volume della sfera.* *Approfondimenti. Formula di Eulero per i solidi; poliedri regolari in vari ambiti (scienze, arte, filosofia), dimostrazione che ne esistono al più cinque; pallone da calcio.*	*12*
7. Statistica: sviluppi[27] *Correlazione tra due grandezze e covarianza.* *Un possibile modello del legame: retta di regressione e determinazione di una formula per i coefficienti mediante il metodo dei minimi quadrati.* *Analisi di situazioni e dati reali mediante il foglio elettronico.* *Ulteriori indici di dispersione: varianza e deviazione standard.* *Approfondimento: coefficiente di correlazione di Pearson e misura della correlazione.*	*(6)*

Bibliografia e sitografia del capitolo 1

[Accascina et al., 2006] Accascina, G., Anichini, G., Anzellotti, G., Rosso, F., Villani, V., Zan, R. (2006). *La matematica per le altre discipline*. Edizioni dell'Unione Matematica Italiana.

https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2013/10/MATTONCINIcrop-finale.pdf

[Adams, 2004] Adams, A. (2004). *Calcolo differenziale 1.* Milano: Casa editrice Ambrosiana. Prima edizione: 1992.

[Alexandrov et al., 2000] Alexandrov, D., Kolmogorov, A.N., Lavrent'ev, M.A. (2000). *Le matematiche.* Torino: Bollati Boringhieri. Prima edizione: 1974.

[Anzellotti, Cappello, Innocenti, 2005] Anzellotti, G., Cappello, L., Innocenti, S. (2005). Matematica: obiettivi, itinerari, interpretazioni. *Nuova Secondaria, 23 (1), 91-97.*

[27] Come abbiamo anticipato nel paragrafo 1.2, è difficile riuscire ad affrontare nella classe terza sia il blocco relativo alla geometria sintetica dello spazio sia il blocco relativo agli sviluppi della statistica, se le unità orarie settimanali riservate alla matematica sono 4. In tal caso si dovrà scegliere quali aspetti esaminare tra quelli proposti e per questo il numero di ore previste nello schema per il blocco *Statistica* non contribuisce al totale delle 120 ore ipotizzato per la classe terza.

[Anzellotti, 2015] *Le funzioni esponenziali e logaritmiche – istruzioni per l'uso*. Video della conferenza tenuta all'Università di Catania il giorno 9/11/2015.
https://www.youtube.com/watch?v=6gw3qUScxjE

[Baccaglini, Di Martino, Natalini, Rosolini, 2018] Baccaglini Frank, A., Di Martino, P., Natalini R., Rosolini G, (2018). *Didattica della matematica*. Milano: Mondadori.

[Boyer, 1990] Boyer, C.B. (1990). *Storia della matematica*. Milano: Mondadori. Titolo originale: A History of mathematics, edita nel 1968.

[Brandi e Salvadori, 2004] Brandi, P., Salvadori, A. (2004). *Modelli matematici elementari.* Milano: Mondadori.

[Bressoud et al., 2016] Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., Törner, G. (2016). *Teaching and Learning of Calculus.* Springer Nature.
https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-319-32975-8.pdf

[Cappello e Innocenti, 2022] Cappello, L., Innocenti, S. (2022). *Facciamo la matematica che conta. Il curricolo di matematica per il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado: dalle scelte didattiche alla declinazione in classe.* Trento: Iprase.
https://www.iprase.tn.it/pubblicazioni-dettaglio/-/asset_publisher/7sljBGdygB6h/content/facciamo-la-matematica-che-conta-il-curricolo-di-matematica-per-il-primo-biennio-della-scuola-secondaria-di-secondo-grado-dalle-scelte-didattiche-alla/20178

[Castelnuovo, 1965] Castelnuovo, E. (1965). L'oggetto e l'azione nell'insegnamento della geometria intuitiva. In Gattegno et al. *Il materiale per l'insegnamento della matematica.* 41-65. Firenze: La Nuova Italia.
http://www.science.unitn.it/~fontanar/EMMA/materiale_insegnamento_1965.pdf

[Castelnuovo, 2017] Castelnuovo, E. (2017). *Didattica della matematica*. Torino: UTET. Edizione originale 1963.

[Colacicco, Lisarelli, Antonini, 2017]. Colacicco, G., Lisarelli, G., Antonini, S. (2017). Funzioni in ambienti digitali dinamici. *Didattica della Matematica.* 2, 7-25.
https://www.journals-dfa.supsi.ch/index.php/rivistaddm/article/view/20/14

[Duval, 1995] Duval, R. (1995). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Actes de lécole d'été, 1995*. Traduzione italiana in La matematica e la sua didattica. 3, 1996, 250-269.

[Duval, 2005] Duval, R. (2005). Linguaggio, simboli e schemi... In quale modo intervengono nella comprensione della matematica e altrove? *Bollettino dei docenti di matematica*. 2005, pp.24-36.

[Frova, 1999] Frova, A. (1999). *Fisica nella musica.* Bologna: Zanichelli.

[Furinghetti, 1993] Furinghetti, F. (1993). Insegnare matematica in una prospettiva storica. *L'educazione matematica*. III, IV, 123-134.

[Giacardi, 2013] Giacardi, L. (2013). La storia della matematica nell'insegnamento*. Slide della conferenza tenuta a Roma il 19/06/2013*.
http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2013/07/GIACARDI-StoriaInsegnamento.pdf.

[Giusti, 1989] Giusti, E. (1989). *Analisi matematica 1.* Torino: Bollati Boringhieri.

[Giusti, 2007] Giusti, E. (2007). *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento.* Pisa, Roma: Istituti editoriali e poligrafici internazionali.

[Gratton et al. 2006] Gratton, L., Operetto, F., Oss, S. (2006). Un'unità didattica sul decadimento radioattivo. *Giornale di fisica.* 47 (3), 249-264.
[ICMI, 1995] Villani, V. (1995). *Prospettive sull'insegnamento della geometria per il 21° secolo.* Documento preparatorio per uno studio internazionale dell'ICMI.
https://matematica.unibocconi.eu/sites/default/files/media/attach/ICMI_1995_PROLUSIONE.pdf
[Invernizzi, 2022] Invernizzi, S. (2022). Dati, relazioni, funzioni, previsioni: non aver paura di sbagliare. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 45 A-B (5), 451-478.
[Israel, 2002] Israel, G. (2002). *Modelli matematici elementari*. Roma: Muzzio
[Klein, 1999] Klein, M. (1999). *Storia del pensiero matematico. I. Dall'antichità al settecento.* Torino: Einaudi.
Titolo originale: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, 1972.
[Maor, 1994] Maor, E. (1994). *The Story of a Number*. Princeton University Press.
[Maraschini e Palma, 2002] Maraschini, W., Palma, M. (2002). *MultiForMat. Potenze e logaritmi (vol. 19)*. Torino: Paravia.
[MIUR, 2010] MIUR (2010). *Indicazioni nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento per i licei.*
https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf
[Lakatos, 1979] Lakatos, I. (1979). *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica.* Milano: Feltrinelli. Edizione originale 1976.
[Lang, 2015] Lang, S. (2015). *La bellezza della matematica*. Torino: Bollati Boringhieri. Edizione originale 1985.
[Odifreddi, 2010] Odifreddi, P. (2010). *C'è spazio per tutti.* Milano: Mondadori.
[Orientamat, 2006] Sito del *Progetto Orientamat.*
http://www.science.unitn.it/orientamat/
[MPI, 1996] *Circolare Ministeriale* del 27 settembre 1996, n. 615. *Piano Nazionale per l'introduzione dell'informatica nelle scuole secondarie superiori. Indicazioni programmatiche relative all'insegnamento della matematica nel triennio del Liceo ginnasio e del Liceo scientifico e nel secondo biennio dell'Istituto magistrale.*
https://www.edscuola.it/archivio/norme/circolari/cm615_96.html
[Pappas, 1995] Pappas T. (1995). *Le gioie della matematica.* Roma: Muzzio.
[Radford, 1997] Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 17 (1), 17-23.
http://www.luisradford.ca/pub/103_RadfordOnPsychologyHistoricalEpistemologyTeachingMathematics.pdf
[Russo, 1998] Russo, L. (1998). *Segmenti e bastoncini*. *Dove sta andando la scuola?* Milano: Feltrinelli.
[Sasso, 2020] Sasso, L. (2020). *Colori della matematica. Modulo E. Edizione blu.* Torino: Petrini.
[Sfard, 1991] Sfard, A. (1991). Sulla doppia natura delle concezioni matematiche: riflessioni su processi e oggetti come diverse facce della stessa medaglia. *Educational studies in mathematics*. 22, 1-36.

[Sfard, 2009] Sfard, A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico.* Trento: Erickson.
[Sfard, 2016] Sfard, A. (2016). Tenere a mente il parlare parlando della mente. Intervento al XXXIII Convegno UMI-CIIM 2016.
https://maddmaths.simai.eu/divulgazione/focus/anna-sfard/
[Tall, 2016] Tall, D. (2016). *Imparare a pensare matematicamente*. *Esplorando i tre mondi della matematica.* Roma: Editori Riuniti.
[UMI, 2014] UMI-CIIM (2014). *Costruzione di percorsi didattici di matematica coerenti con le indicazioni della riforma.*
https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/
[Villani, 2003] Villani, V. (2003). *Cominciamo da Zero.* Bologna: Pitagora.
[Villani, 2006] Villani, V. (2006). *Cominciamo dal Punto.* Bologna: Pitagora.
[Villani, 2007] Villani, V. (2007). *Matematica per discipline bio-mediche.* Milano: Mc Graw-Hill. Prima edizione: 1991.
[Villani et al., 2012] Villani, V., Bernardi, C., Zoccante, S., Porcaro, R. (2012). *Non solo calcoli.* Milano: Springer-Verlag Italia.
[Zan, 2001] Zan, R. (2001). I danni del "bravo" insegnante*. Atti del Convegno Le difficoltà in matematica: da problema di pochi a risorsa per* tutti. 135-141. Bologna: Pitagora.
https://fisicaperlascuola.files.wordpress.com/2016/09/i-danni-del-bravo-insegnante.pdf
[Zan, 2007] Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* Milano: Springer-Verlag Italia.

2. Un percorso per la classe quarta: le scelte didattiche

Nel capitolo 1 ci siamo occupati della classe terza. Con le stesse attenzioni e le stesse modalità ci proponiamo ora di illustrare la nostra proposta per la quarta, anche se la distinzione tra i due percorsi non è netta, visto che vari aspetti si possono affrontare in una classe o nell'altra, in base al contesto e al proprio modo di intendere l'insegnamento e l'apprendimento.

In estrema sintesi, nella classe terza abbiamo proposto di affrontare alcuni aspetti essenziali della geometria analitica del piano, completare la trigonometria del triangolo, anticipare la derivata, esaminare come opera la funzione esponenziale ed, eventualmente, dare uno sguardo alla geometria sintetica dello spazio e agli sviluppi della statistica. Tuttavia, nel capitolo precedente più che il *cosa* abbiamo curato il *come*, altrimenti il rischio è che gli studenti assistano ad un racconto, ma non ne siano i protagonisti, guardino contenuti e strumenti, ma non li *vedano* davvero, non ne trovino un *senso*, non se ne *approprino* e non ne dispongano a *lungo*.

2.1 Alcune scelte didattiche generali

Si può iniziare l'anno scolastico con l'esame delle *funzioni trigonometriche,* così da completare da una parte la trigonometria e dall'altra lo studio delle funzioni base[1]. Il loro ruolo è ricordato in [Accascina et al., 2006, pag. 53]:

[1] Ricordiamo che per funzioni base intendiamo le funzioni potenza (e dunque, in particolare, le radici), le funzioni esponenziali e logaritmiche, le funzioni trigonometriche seno, coseno e tangente e le loro inverse.

Le funzioni trigonometriche sono però importanti non tanto per la loro relazione con i lati e gli angoli di un triangolo, quanto per le loro speciali proprietà, che le rendono strumenti fondamentali per la modellizzazione dei fenomeni periodici, come quelli che si incontrano in molti problemi della fisica e dell'ingegneria (ad esempio moti armonici, moti planetari, fenomeni ondulatori).

Anche per questo riteniamo che si dovrebbe dare attenzione all'analisi di semplici *modelli* periodici e ai grafici delle funzioni trigonometriche, e non occuparsi (quasi) solo di formule ed equazioni, come invece sembrano fare i libri di testo. Lo avevamo osservato anche a proposito della funzione esponenziale, nel capitolo precedente.

Un altro tema che è già stato introdotto nelle classi precedenti è il calcolo delle probabilità. La nostra idea è di dare uno sguardo indietro e uno avanti, ovvero da un lato approfondire la probabilità *condizionata* e consolidare dunque quanto affrontato nel primo biennio e dall'altro introdurre lo schema delle *prove ripetute* e così preparare alle distribuzioni di probabilità, previste dalle Indicazioni nazionali [MIUR, 2010] per la classe quinta del Liceo scientifico e dell'opzione delle Scienze applicate.

Infatti la probabilità di eventi che dipendono da altri è già comparsa nel nostro percorso per la classe seconda, nelle situazioni che si possono ricondurre allo schema base dell'urna senza reinserimento; ora si tratta di precisarla e di farlo a partire dall'esigenza – che vorremmo fosse degli studenti e non del docente –, di rappresentare e discutere in modo *efficace* problemi più articolati, come risalire alla probabilità delle "cause" nell'ambito dei test clinici.

Il modello delle prove ripetute, invece, va affrontato poiché è uno schema *di base,* nel senso che modellizza situazioni di vario tipo, è quello che per la sua semplicità si utilizza spesso in prima battuta, e permette di ottenere le principali distribuzioni previste dalla normativa, ossia la binomiale, la normale e la distribuzione di Poisson; ma anche perché tale schema prepara, dal punto di vista didattico, alle distribuzioni di probabilità. Ne parleremo nelle prossime sezioni.

La scelta forse più innovativa per la classe terza è stata anticipare l'introduzione della derivata; per non disperderne i benefici, è opportuno *proseguire* il percorso e arricchire gli strumenti a disposizione, introducendo la derivata di funzioni composte. Potendo contare su un insieme di funzioni più vasto, si potranno approfondire le questioni discusse nella classe precedente, quali determinare l'equazione delle rette tangenti, individuare punti stazionari, risolvere problemi di ottimizzazione, schematizzare variazioni in fisica e in altri ambiti.

E finalmente arriviamo ai *limiti*. Esaminarli permette di *precisare* il comportamento di una funzione agli estremi dell'insieme di definizione ma anche di *comprendere* più in profondità la definizione di derivata, nonché la definizione di integrale e la continuità delle funzioni, di cui ci occuperemo però nella classe quinta.

I limiti non vanno ridotti al risultato di un calcolo. Per questo il primo approccio consisterà nel "mettere le mani" sulle funzioni per descrivere il loro comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, prima analizzando tabelle di valori e considerando porzioni del grafico, e più avanti pensando in termini di rapidità di crescita all'infinito invece di ricorrere unicamente ai classici raccoglimenti che propongono i libri di testo o al teorema di de l'Hôpital (che resta comunque utile nelle situazioni più articolate). La nostra scelta si traduce anche nel dare rilevanza all'interpretazione grafica di questi oggetti matematici; in particolare, preferiamo considerare *in parallelo* limiti e grafici, ossia non esaurire prima il calcolo dei limiti e poi applicarlo alla costruzione e all'analisi dei grafici: i due punti di vista si arricchiscono a vicenda e permettono di comprendere meglio quanto si sta facendo.

Con ciò non vogliamo certo dire che non vanno considerati gli aspetti formali; anzi, sarebbe rischioso fare riferimento solo ad un modello primitivo e intuivo del concetto, poiché esso, come indica Fischbein in [Fischbein, 1989, pag. 26 e 27], continua a

> *influenzare, tacitamente, le interpretazioni e le decisioni risolutive dell'allievo. Il termine tacito significa semplicemente che l'individuo non è consapevole di questa influenza, oppure, per lo meno, della sua estensione.*

Inoltre

> *manipola da dietro le quinte il significato, l'uso, le proprietà del concetto formalmente stabilito.*

In questa prospettiva è importante soffermarsi ad analizzare ed interpretare la definizione di limite, almeno in alcuni casi elementari.

Se c'è tempo, si può proporre qualche approfondimento, come *misurare l'infinito*, ossia investigare la cardinalità degli insiemi, naturalmente ad un livello adeguato per la scuola secondaria e per ragioni culturali più che per apprendere tecniche. In aggiunta, l'attività ha ricadute sullo sviluppo di abilità significative: utilizzare il linguaggio degli insiemi e delle funzioni, consolidando la conoscenza degli insiemi numerici, esaminare e produrre alcune dimostrazioni formative e di una tipologia diversa rispetto a quelle discusse fino qui.

2.2 Un percorso

2.2.1 Modelli periodici e funzioni trigonometriche

Abbiamo proposto di esaminare gli aspetti *geometrici* della trigonometria già nella classe seconda e di completarli poi nella classe terza: stiamo parlando della trigonometria del triangolo, dalla definizione di seno, coseno e tangente nel triangolo rettangolo fino al teorema del coseno.

All'inizio della classe quarta ci si può occupare degli aspetti relativi alle funzioni, anche se le Indicazioni nazionali prevedono di esaurire la trigonometria, compreso l'esame delle funzioni trigonometriche, ancora nel primo biennio. Ma non è troppo presto? Secondo noi, serve più tempo se non ci si accontenta che gli studenti vedano grafici senza utilizzarli in contesti significativi, ma si vuole che apprendano a fondo e ne dispongano a lungo, anche all'Esame di stato, come richiede il Quadro di riferimento per il Liceo scientifico e dell'opzione scienze applicate [MIUR, 2018]:

> *Servirsi delle funzioni circolari per esprimere relazioni tra gli elementi di una data configurazione geometrica. […]*
> *Analizzare proprietà di parità […], periodicità di funzioni […].*
> *Individuare le caratteristiche fondamentali e i parametri caratteristici […] delle funzioni circolari.*

La definizione nel triangolo non basta più

Il primo passo è *estendere* la definizione delle funzioni seno, coseno e tangente all'insieme dei numeri reali, e un motivo per farlo è

> *descrivere la posizione di un oggetto puntiforme che ruota su una circonferenza di raggio assegnato.*

Se ne discuterà assieme agli studenti, lasciando ampio spazio alle loro proposte. Per iniziare conviene fissare un sistema di coordinate cartesiane che abbia come origine il centro O della circonferenza e unità di misura il raggio. Ogni punto P sulla circonferenza resta allora *individuato* dall'angolo α che la semiretta OP forma con il semiasse positivo delle ascisse; ma che *relazione* c'è tra α e le coordinate di P?

Se α è acuto, essa si ricava immediatamente dalle definizioni di seno e coseno date nel triangolo rettangolo; ma se α non è acuto tali definizioni non si possono applicare. L'idea è di *estenderle* in modo che la relazione tra α e le coordinate di P valga anche per angoli non acuti, e dunque si impone che $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$ siano le coordinate del punto P

anche per tali angoli. Restano così definite le funzioni seno e coseno per angoli qualsiasi.

I libri di testo seguono generalmente un percorso *inverso* e, già nel primo biennio, definiscono le funzioni trigonometriche direttamente sulla circonferenza di raggio 1, mentre solo più avanti le esprimono come rapporto tra lati nel triangolo rettangolo; ma soprattutto non forniscono le ragioni per cui ha senso introdurre tali funzioni, privando così gli studenti di un'occasione per fare matematica davvero.

Le conclusioni a cui si giunge sono sintetizzate nella dispensa *Funzioni trigonometriche: definizione*, che mostreremo nel paragrafo 3.3 del volume assieme agli altri materiali realizzati sul tema, mentre, per visualizzare dinamicamente la situazione, si può fare riferimento ai file *DefSin1.ggb* e *DefSin2.ggb*.

Due considerazioni, da condividere con gli studenti. La prima: nel contesto delle funzioni si privilegiano i *radianti* poiché in tale unità di misura la pendenza del grafico del seno in 0 vale 1, ossia $\cos 0$, e, più in generale, la derivata della funzione seno in ogni punto è la funzione coseno; l'uguaglianza invece non vale se gli angoli sono misurati in gradi[2]. La ragione è dunque analoga a quella che porta a preferire la base naturale *e* per le funzioni esponenziali, come si precisa in [Villani, 2007, pag. 121], un testo ideato per i corsi di analisi universitari ma che contiene ottimi spunti anche per la scuola secondaria.

La seconda riflessione muove invece dalla constatazione che le funzioni trigonometriche sono strumenti fondamentali per *modellizzare fenomeni periodici* in vari contesti, e non solo in ambito geometrico. Ma allora, come sostengono gli autori in [Accascina et al., 2006, pag. 53]:

> È necessario *[...] che gli studenti acquisiscano, accanto all'idea di funzione trigonometrica di un angolo, l'idea di funzione trigonometrica definita nell'insieme dei numeri reali.*

Chiariti questi aspetti, si può mostrare che la relazione $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ si estende immediatamente all'insieme dei numeri reali.

Invece eviteremmo esercizi come la verifica di identità goniometriche o la manipolazione di espressioni articolate. Semmai può essere utile, noti alcuni valori notevoli delle funzioni trigonometriche, determinarne altri sfruttando le simmetrie di tali funzioni, oppure esprimere, ad esem-

---

[2] In realtà, prima ancora c'è una ragione di natura geometrica. La misura in radianti è *geometrica*, visto che è il rapporto tra la lunghezza dell'arco e il raggio, ossia di grandezze intrinsecamente legate all'angolo, mentre la misura in gradi è *più arbitraria*, frutto della decisione di suddividere l'angolo giro in 360 parti uguali.

pio, il seno e il coseno in funzione della sola tangente. Non subito però: è meglio attendere un po' e farlo nel contesto delle equazioni e disequazioni, visto che tali questioni intervengono nella loro interpretazione, e allora per gli studenti calcolare valori delle funzioni trigonometriche o effettuare semplici manipolazioni acquisterà un *senso*.

La definizione va completata costruendo il *grafico* delle funzioni trigonometriche, in scala monometrica, prima su *carta* – per punti e sfruttando le simmetrie del moto del punto sulla circonferenza –, e poi mediante GeoGebra (file *DefSin3.ggb*). Il riferimento è ancora la dispensa indicata prima.

Dai fenomeni periodici alla funzione

Il passo successivo è costruire semplici *modelli* di fenomeni periodici, introdurre così la funzione $A\sin(\omega x)$ ed esaminarla a fondo, come peraltro richiede il quadro di riferimento per l'Esame di stato del Liceo scientifico.

Ad esempio, si può analizzare mediante il software Audacity[3] il suono emesso da un diapason, esaminando una questione come questa:

> *Il grafico mostrato nel file Diapason.wav[4] rappresenta il suono emesso da un diapason; precisamente è il grafico della variazione di pressione dell'aria in un punto al variare del tempo t, espressi in opportune unità di misura. Prova ad indicare come si può ottenere il grafico in figura a partire da quello della funzione* $\sin t$.

Volendo si può porre la domanda in forma più aperta, ossia non indicare la funzione da cui partire, ma richiedere semplicemente di determinare l'espressione della funzione il cui grafico è rappresentato in figura. In ogni caso, i ragazzi esaminano la situazione, si confrontano tra loro e con il docente, e formulano alcune congetture; per gradi dovrebbero intuire che si tratta di dilatare il grafico della funzione base $\sin t$ lungo entrambi gli assi e che queste due trasformazioni conducono al grafico di una funzione della forma $A\sin(\omega t)$.

---

[3] Audacity è un'applicazione di editing audio che si può scaricare gratuitamente, ad esempio all'indirizzo https://www.audacityteam.org/download/.

[4] Il file, come gli altri in formato wav indicati nella sezione, va aperto con una applicazione come Audacity, in modo da visualizzare la corrispondente rappresentazione grafica. Per non complicare troppo il lavoro, è opportuno considerare un suono che abbia volume approssimativamente costante; perciò serve ritagliare una opportuna porzione del grafico proposto nel file Diapason.wav, operazione consentita dal software. Un grafico di questo tipo è proposto anche nel foglio di attività 2.

Per rispondere serve dunque precisare il *significato geometrico* dei parametri; l'aspetto più delicato è comprendere come variano i grafici al variare di ω, pertanto dopo un po' si può suggerire ai ragazzi di tracciarne alcuni – sia per valori "piccoli" sia per valori "grandi" del parametro –, e di osservarli in modo mirato. Le conclusioni dell'indagine sono riportate nella prima parte della dispensa *Funzione* A$\sin(\omega x)$ e per consolidarle si può utilizzare il foglio di attività *1*, che richiede la costruzione, l'analisi e l'interpretazione di numerosi grafici di funzioni trigonometriche elementari.

Accanto alla precisazione del significato geometrico dei parametri A e ω, è interessante sondare la loro interpretazione *sonora*, ad esempio con l'attività basata sul file *Parametri.wav*, con un video[5] significativo e un'applicazione[6] che permette di suonare un pianoforte virtuale e di visualizzare le frequenze delle note.

Approfondimento. Eventualmente in modo interdisciplinare, si possono confrontare suono e rumore mediante il file *Diapason2.wav* oppure si possono approfondire i caratteri distintivi del suono, ad esempio il timbro con il file *Timbro.wav*.

E si può accennare al fatto che la somma di opportune funzioni trigonometriche approssima funzioni periodiche, magari attraverso l'attività descritta nel file *Scomposizione.ggb*, che utilizza le funzioni indicate in [Baldo, 2015] nell'ambito del PLS, Progetto Lauree Scientifiche. Naturalmente il risultato sotteso è il noto teorema di Fourier.

Tornando al punto di vista geometrico, resta da completare l'esame dei grafici delle funzioni trigonometriche individuando le loro simmetrie. È un'occasione per approfondire le nozioni di funzione *pari* e funzione *dispari* e per discutere la loro formalizzazione; lo si può fare mediante il foglio di attività *2*, che richiede di "mettere le mani" sui grafici di diverse funzioni, e con la seconda parte della dispensa *Funzione* A$\sin(\omega x)$, che riporta quanto si dovrebbe arrivare a precisare insieme in classe.

Senza un lavoro di questo tipo, difficilmente si può sperare che gli studenti attribuiscano *un senso* alle definizioni considerate e ne dispongano a lungo, anche in contesti diversi.

---

[5] https://www.youtube.com/watch?v=u1_H4S0skoo

[6] http://www.physics-chemistry-interactive-flash-animation.com/electricity_electromagnetism_interactive/oscilloscope_description_tutorial_sounds_frequency.htm

Equazioni e disequazioni: quando, quali e come

- *Quando introdurle?*
  Secondo noi subito dopo aver discusso alcuni modelli periodici, poiché questi ne motivano lo studio, come mostra il problema che segue.

  Un corpo, che è soggetto ad una forza elastica, si muove lungo una retta secondo la legge oraria $s(t) = 4\sin(2t)$, espressa nelle unità di misura del sistema internazionale.
  Dopo quanto tempo dall'istante iniziale $t = 0$ si trova per la prima volta nella posizione $s = 2$?
  Il corpo passa più tempo nell'insieme delle posizioni s tali che $|s| < 2$ oppure nell'insieme delle posizioni tali che $2 < |s| < 4$?

  I libri di testo non sono di questa idea e di solito presentano le equazioni solo dopo aver proposto manipolazioni di espressioni trigonometriche e aver affrontato minuziosamente gli "archi associati" e le formule trigonometriche; ma tali questioni, oltre ad essere eccessive – come abbiamo già osservato –, impegnano lo studente nell'esame di casi specifici senza che ne possa intravedere l'obiettivo e trovare il senso.
  Per questo preferiamo prima introdurre le equazioni e, solo in tale contesto, esprimere una funzione trigonometrica in termini delle altre ed esaminare gli "archi associati", o meglio, come vedremo a breve, le simmetrie del grafico delle funzioni trigonometriche. Le formule trigonometriche possono attendere ancora un po': ci sono questioni più importanti da affrontare.

- *Quali tipologie considerare?*
  Ci sembrano irrinunciabili le equazioni e le disequazioni elementari, ossia della forma $\sin x = c$, $\cos x = c$ e $\sin x \leq c$, (quelle in $\tan x$ sono meno significative), le equazioni e le disequazioni che hanno struttura di secondo grado e quelle, come $\cos(\pi x) < \frac{1}{2}$, in cui interviene una funzione trigonometrica che ha periodo diverso da 2π.
  Naturalmente sono importanti anche le equazioni e le disequazioni costituite da prodotti e quozienti, e disequazioni come $\cos x < x$, per le quali è cruciale rappresentare in scala *monometrica* i grafici delle funzioni coinvolte.
  Secondo noi, nella scuola secondaria non è necessario esaminare ulteriori tipologie, nemmeno le equazioni lineari. E se, più avanti, lo studente dovesse incontrarle, ci auguriamo sappia comprendere in breve tempo come risolverle, magari consultando autonomamente un testo; anzi, ce lo aspettiamo, visto che potrà contare sui casi di cui dispone, scelti proprio per la loro significatività, e sulle abilità/

competenze sviluppate nell'intero percorso. Stiamo alludendo, in particolare, all'imparare cose nuove a partire da ciò che si sa: *imparare ad imparare* è proprio una delle competenze chiave indicate nella Raccomandazione del Parlamento Europeo [EUR, 2006], ossia

quelle di cui tutti hanno bisogno per la realizzazione e lo sviluppo personali, la cittadinanza attiva, l'inclusione sociale e l'occupazione.

- *Come risolverle?*
  Mediante le *funzioni* e i *grafici*, secondo l'approccio che abbiamo proposto fin dalla classe seconda. Con un'attenzione: trasformare le disequazioni del tipo $\sin x - k < 0$ nella forma $\sin x < k$, e così lavorare sul grafico della funzione $\sin x$ e determinare gli x tali che $\sin x = k$. Se però $\sin x - k$ compare come numeratore o denominatore o come fattore in una disequazione (ridotta in forma "normale") allora ci sembra più conveniente determinare il suo *segno* considerando direttamente il grafico della funzione $\sin x - k$. In modo analogo, naturalmente, si dovrebbero risolvere le altre equazioni e disequazioni trigonometriche elementari.
  Il passo più delicato del procedimento è trovare tutti gli x che verificano l'uguaglianza richiesta. Come abbiamo anticipato, per farlo preferiamo lavorare sul grafico della funzione e ricorrere alle sue *simmetrie*; ad esempio, per risolvere l'equazione $\sin x = -\frac{1}{2}$, basta individuare il valore di *riferimento* nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$, ossia quello in cui la funzione seno vale $\frac{1}{2}$, e da esso, sfruttando le simmetrie del grafico di $\sin x$, dedurre poi *tutti* i valori in cui la funzione vale $-\frac{1}{2}$.
  Per risolvere equazioni e disequazioni non serve dunque ricorrere alla circonferenza goniometrica, come invece propongono di solito i libri di testo. Del resto, se si vuole che gli studenti comprendano a fondo e dispongano a lungo di quanto appreso, è meglio adottare un approccio che valga in generale e non solo in un ambito specifico, così da poterlo riutilizzare anche in altri contesti. La circonferenza goniometrica resta comunque un modello utile, a cui talvolta si può fare riferimento, ad esempio per *controllare* da un altro punto di vista le simmetrie del grafico.

Tutti gli aspetti passati in rassegna nella sezione intervengono nei fogli di attività 3 e 4, dedicati all'esame e alla risoluzione di equazioni e disequazioni trigonometriche. In particolare, non si richiede di fornire tutte le soluzioni ma solo quelle che appartengono ad un *intervallo assegnato*: in questo modo gli studenti sono indotti ad analizzare a fondo il grafico della funzione, individuando con precisione e consapevolezza le soluzioni, senza dover memorizzare formule risolutive standard o formule per esprimere la periodicità.

Il problema inverso

Proprio nell'ambito delle equazioni nasce l'esigenza di approfondire l'invertibilità delle funzioni trigonometriche e di precisarla: come indicare, ad esempio, le soluzioni dell'equazione $\sin x = -\frac{1}{3}$?

La questione non è nuova, visto che già nel percorso relativo al primo biennio ci siamo posti il problema di determinare l'ampiezza dell'angolo di un triangolo rettangolo a partire dal valore del seno, del coseno o della tangente. E in quel contesto avevamo proposto di adottare un approccio informale, basato sull'uso della calcolatrice: in sostanza, come illustrato in [Cappello e Innocenti, 2022, sez. 2.3.6], si trattava di considerare la scrittura $\alpha \rightarrow \sin\alpha$ e leggerla in senso inverso, o, in altre parole, passare "da destra a sinistra" nello schema.

Nella classe quarta, però, questa semplificazione diventa eccessiva, anche perché le funzioni trigonometriche sono invertibili finché le si considera definite nel triangolo rettangolo, mentre non lo sono più quando si estendono all'insieme dei numeri reali. Pertanto è opportuno riesaminare formalmente la situazione, discutere l'invertibilità delle funzioni seno, coseno e tangente, precisare l'insieme di definizione delle loro inverse e provare a tracciarne i grafici.

Tuttavia ciò che ci interessa non è tanto risolvere esercizi con funzioni inverse, peraltro potrebbero apparire troppo tecnici ad alcuni ragazzi, quanto consolidare diversi aspetti generali relativi alle funzioni e impiegare, in situazione, i simboli e il linguaggio formale.

Arricchiamo la conoscenza delle funzioni trigonometriche: la derivata

Questa è la principale ragione per occuparsi della derivata delle funzioni trigonometriche e per affrontare le tipiche questioni in cui interviene, dalla scrittura dell'equazione della retta tangente alla ricerca dei massimi e minimi locali. Ma ci sono altri buoni motivi per farlo, quali familiarizzare ulteriormente con la nozione di *derivata* e approfondire i modelli periodici, ad esempio determinare velocità e accelerazione in moti armonici.

D'altra parte, proprio tali questioni conducono a considerare nuovamente *equazioni* e *disequazioni* trigonometriche, e dunque permettono di consolidarle, in un contesto che spesso stimola gli studenti.

Per iniziare, i ragazzi possono *congetturare* la derivata della funzione seno: provano a tracciare su *carta* il grafico della funzione derivata a partire da quello del seno e lo controllano mediante il software, come è proposto nell'attività *Derivata delle funzioni trigonometriche* con i file *DerivataSin1.ggb* e *DerivataSin2.ggb*. In modo analogo possono investigare la derivata della funzione coseno.

Naturalmente il disegno non è una dimostrazione e ciò va chiarito in classe, tuttavia è già molto, poiché è prioritario che gli studenti si *convincano* della bontà del risultato rispetto ad attestarne formalmente la correttezza; del resto, come ricorda Bernardi in [Bernardi, 2019], l'etimologia greca del termine "teorema" non è proprio *guardare*, *osservare*? Ciò non significa che la dimostrazione sia superflua, tuttavia non conviene discuterla in questa fase del percorso, poiché richiede di calcolare un limite non banale per mezzo del limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

A questo punto gli studenti dovrebbero essere in grado di affrontare lo stesso tipo di questioni esaminate nella classe terza con le funzioni potenza ed esponenziale e che ora proponiamo per le funzioni trigonometriche nel foglio di attività 5. Anzi, il foglio invita a fare un passo in più e a congetturare la derivata di funzioni del tipo $\sin(\omega x)$ per mezzo di opportune considerazioni grafiche.

Una sola formula goniometrica

La formula principale è quella di *addizione* del seno e del coseno, che, tra l'altro, mostra la non linearità delle funzioni trigonometriche, ed è l'unica *davvero* importante nella scuola secondaria. È bene che gli studenti ne dispongano a lungo e che da essa sappiano ricavare in poco tempo le formule di sottrazione e duplicazione.

Queste formule ci sembrano sufficienti, anche in considerazione del fatto che le Indicazioni nazionali non ne parlano e che perfino la normativa precedente [MPI, 1944] prevedeva solo:

> *Formule per l'addizione, la sottrazione, la duplicazione e la bisezione degli argomenti.*

È un'indicazione che induce a riflettere, anche perché i programmi ministeriali in vigore fino al 2010 richiedevano complessivamente meno contenuti rispetto agli attuali indicati per il Liceo Scientifico.

Detto ciò, i ragazzi dovrebbero comunque sapere che esistono altre formule trigonometriche, e di alcune tra esse dovrebbero conoscere la struttura e qualche utilità, e saperle recuperare da un testo quando servono, anche in fisica. Ad esempio, non è necessario ricordare il nome delle formule di *prostaferesi*, basta sapere che alcune formule esprimono somme di funzioni trigonometriche base in termini di prodotti e dunque possono essere impiegate per risolvere equazioni o per scrivere un'espressione in una forma equivalente ma più utile per un dato scopo, come determinare l'ampiezza di un'onda in fisica.

In ogni caso, conoscere formule specifiche non è così importante; lo è di più sviluppare l'abilità di manipolare semplici espressioni trigonometriche in vista di un *obiettivo*, ad esempio esprimere il coseno di un angolo in funzione del solo coseno dell'angolo metà, e saperlo fare in tempi ragionevoli. Non è un'attività nuova nel percorso: si tratta unicamente di estendere alle nuove espressioni l'approccio adottato ancora nel primo biennio per operare con i polinomi e le formule algebriche.

Un riferimento significativo per le formule trigonometriche è la prima parte del percorso *Trigonometria 2,* realizzato con il Laboratorio DiCoMat nell'ambito del progetto [Orientamat, 2006], che si può utilizzare sia come dispensa per la rielaborazione di quanto discusso a scuola sia come traccia per il lavoro autonomo dello studente, da svolgere a casa e poi discutere in classe.

Invece al riepilogo e al consolidamento di quanto affrontato sulle funzioni trigonometriche è dedicato il foglio attività *6*, mentre un esempio di verifica è verifica *1*.

2.2.2 Sviluppi della probabilità

Nel percorso relativo al primo biennio abbiamo precisato l'approccio *classico* alla probabilità e abbiamo cercato di comprendere cosa accade nella *pratica*, effettuando esperimenti con dadi e monete nonché simulazioni con il foglio elettronico e interpretandone gli esiti; per affrontare situazioni più articolate, abbiamo poi introdotto la legge della moltiplicazione e discusso la probabilità di eventi complementari ([Cappello e Innocenti, 2022, sez. 2.3.4]).

Come proseguire nel secondo biennio? La nostra idea è di guardare da una parte al primo biennio, per precisare la *probabilità condizionata*, dall'altra alla classe quinta e introdurre lo schema delle *prove ripetute*. I prerequisiti sono pochi, basta disporre con sicurezza della legge della moltiplicazione e dello schema classico di valutazione della probabilità, ma sono essenziali e vanno recuperati qualora non fossero disponibili, a costo di tralasciare qualche aspetto del nuovo percorso.

Diciamo subito che la probabilità condizionata, di fatto, è intervenuta in varie situazioni di cui ci siamo occupati già nella classe seconda, molte delle quali si possono ricondurre alle estrazioni senza reinserimento da un'*urna*; semmai ora si tratta di approfondirla e formalizzarla ad un livello adeguato per lo studente del secondo biennio, per poter rappresentare e discutere in modo *efficace* situazioni più articolate, come l'esame delle "cause" nei test clinici.

Del resto, quelli legati agli eventi che dipendono da altri sono gli unici aspetti specifici sulla probabilità indicati esplicitamente per il secondo biennio dalla normativa [MIUR, 2010]:

Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni […].

Tuttavia fornirne una definizione e introdurre i simboli per indicarla non ci sembra strettamente necessario, e, in base alle esigenze della classe, ci si può eventualmente accontentare di consolidare la legge della moltiplicazione, senza esaminare ulteriori aspetti.

È invece fondamentale discutere lo *schema* delle *prove ripetute,* per varie ragioni. In primo luogo, è uno schema *di base*, visto che da esso si ottengono le principali distribuzioni di probabilità – almeno quelle citate esplicitamente nelle Indicazioni nazionali per la classe quinta, ossia la binomiale, la normale e la distribuzione di Poisson[7] –, inoltre si può utilizzare per modellizzare, magari in prima approssimazione, diverse situazioni, come l'overbooking che analizzeremo in una delle prossime sezioni.

In secondo luogo, lo schema è stato introdotto già nella seconda metà del diciassettesimo secolo, ossia fin da quando è *iniziato* lo studio della probabilità in termini matematici; pertanto, come è avvenuto nella storia, anche a scuola ha senso discuterlo prima di affrontare le distribuzioni. Ma c'è un ulteriore motivo: a differenza di quanto avviene spesso nel primo biennio, il modello induce a considerare *contemporaneamente* più valori di probabilità relativi ad una stessa situazione, e dunque anche per questo prepara allo studio delle distribuzioni di probabilità previsto nella classe quinta. In particolare, per sintetizzare tali valori, si può anticipare la nozione di valor medio.

Analoghe considerazioni sono riportate nel classico manuale [Dall'Aglio, 2003, pag. 61]:

Si può dire che questo modello è alla base del calcolo delle probabilità, sia perché, presentandosi come una naturale interpretazione in molte situazioni, è stato studiato fin dal sorgere del calcolo delle probabilità, dando luogo a risultati di notevole importanza, sia perché molte situazioni assai più complicate hanno preso spunto da esso, possono considerarsi sue estensioni, e conservano, nelle linee di fondo, i risultati ottenuti in esso.

---

[7] In estrema sintesi possiamo dire che la distribuzione binomiale si ottiene rileggendo opportunamente nel linguaggio delle variabili aleatorie lo schema delle prove ripetute. Inoltre, quando la probabilità di successo nella singola prova è "grande", in opportune condizioni la binomiale si può approssimare mediante la distribuzione normale; analogamente, quando tale probabilità è «piccola», la binomiale si approssima con la distribuzione di Poisson. Le convergenze sono precisate rispettivamente dal *Teorema limite centrale* e dalla *Legge dei piccoli numeri*.

Non è tutto: le Indicazioni nazionali suggeriscono di affrontare nel secondo biennio anche gli

elementi di base del calcolo combinatorio.

In realtà, secondo noi vale la pena considerarli già nel primo biennio, anche se in un'accezione diversa da quella che traspare dai libri di testo, ossia nel senso di *contare gli elementi di un insieme*, come è chiarito in [Cappello e Innocenti, 2022, sez. 2.2.1]; perciò nella classe quarta si tratta di affinare questi strumenti e cogliere l'occasione per introdurre i nomi dei vari tipi di raggruppamento e il simbolo per indicare i coefficienti binomiali, in modo da semplificare la comunicazione quando si discute un testo o ci si confronta sulla risoluzione di un quesito.

L'insieme di questi diversi aspetti definisce una proposta che ora esamineremo più nel dettaglio e che si fonda sulle idee e sui percorsi sviluppati nell'ambito del Laboratorio DiCoMat dell'Università di Trento, sperimentati in numerose classi e illustrati negli ipertesti [Cappello e Mazzini, 2017, capitolo 6] e [Danzi e Scapin, 2017], a cui rimandiamo per approfondire quanto diremo.

Probabilità di eventi che dipendono da altri

Si può partire da un problema come questo:

Osserva le tavole di mortalità rilasciate dall'Istat per l'anno 2021[8]*. Qual è la probabilità per la quarantenne italiana di vivere almeno fino ai settant'anni?*

Gli studenti esaminano liberamente la tabella, individuano i dati che ritengono significativi, e si confrontano tra loro, esplicitando le scelte compiute. Il docente invece può accennare a come si ricavano tali numeri e quali sono le assunzioni da fare se si intende impiegarli per effettuare previsioni[9], ma senza evidenziare nel testo i valori che consentono di risolvere il problema, ossia che ogni 100.000 femmine nate, all'anno 40 ne sopravvivono 99.101 e all'anno 70 ne sopravvivono 90.109.

Altrimenti il rischio è che i ragazzi si limitino a combinare i pochi

[8] Le tavole si possono trovare all'indirizzo: http://dati.istat.it/Index.aspx?DataSetCode=DCIS_MORTALITA1. Basta scegliere l'opzione "Singole età" alla voce "Tavole di mortalità".

[9] Una spiegazione del significato e delle modalità di costruzione delle tavole si trova all'indirizzo: https://iol.unibo.it/pluginfile.php/229135/mod_unibores/content/0/Dispensa%20Tavole%20di%20mortalita%CC%80.pdf

valori forniti senza averne il controllo semantico, nella convinzione che in matematica i problemi abbiano sempre una soluzione e che questa si ottenga utilizzando tutti i dati che compaiono nel testo e le quattro operazioni. In letteratura ciò è noto come effetto *età del capitano* ed è così descritto in [Freudenthal, 1994, pag. 97]:

> *Per spiegare ciò che intendo dire, vorrei citare una ricerca molto interessante […] svolta dal gruppo Elémentaire dell'IREM (Institut de la Recherche sur l'Einseignement Mathématique) di Grenoble.*
>
> *Il gruppo ha formulato la domanda: su una nave ci sono 26 pecore e 10 capre. Qual è l'età del capitano?*
> *Su 97 scolari CE 1-2 (Cycle élémentaire 1-2), di 7-8 anni, 76 riuscirono a trovare l'età del capitano sulla base dei dati forniti dal problema.*

Al di là di queste considerazioni didattiche, il nostro problema mette in luce i due aspetti che caratterizzano la probabilità condizionata: si dispone di un'*informazione aggiuntiva* rispetto alla richiesta di determinare semplicemente la probabilità che la donna italiana arrivi a compiere settant'anni, ed è l'indicazione che la donna sia quarantenne; inoltre si *decide* di utilizzare tale informazione per valutare la probabilità richiesta. Non sono osservazioni scontate per gli studenti, e parlarne (anche decontestualizzandole) contribuisce a chiarire cosa significa modellizzare, come peraltro richiedono le Indicazioni nazionali proprio relativamente al tema Dati e previsioni per il secondo biennio:

> *In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico.*

Problemi analoghi sono esaminati in dettaglio in [Cappello e Mazzini, 2017, sez. 6.1] e mostrano che questo tipo di probabilità, ossia la probabilità di *eventi che dipendono da altri*, compare in diversi ambiti significativi e che dunque ha senso studiarla e attribuirle un nome, quello di probabilità condizionata appunto.

Dalla formalizzazione ai test clinici

Nella teoria assiomatica la probabilità condizionata si definisce mediante la formula $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, come si legge ad esempio nel classico testo [Baldi, 2012, pag. 22], che è un valido riferimento per il docente. Tuttavia questa formalizzazione può apparire criptica agli occhi dello studente della scuola secondaria, pertanto riteniamo che vada proposta in una veste più accessibile, attraverso il suo *significato* nell'interpretazione classica della probabilità, ossia come la probabilità che accada un dato evento sapendo che ne è avvenuto un altro assegnato e di questo fatto si decide di tenere conto nella valutazione. Semmai, in seguito, si mostrerà come dal significato di probabilità condizionata si può ricavare la formula appena indicata; in altre parole, proponiamo di *invertire* l'ordine normalmente seguito nelle sistemazioni assiomatiche: non dalla definizione al significato, ma dal significato alla definizione. In questa prospettiva preferiamo adottare la notazione $p_B(A)$, forse meno diffusa rispetto alla più comune $p(A|B)$, ma più chiara ed espressiva per lo studente del secondo biennio.

Questi ed altri aspetti sono condensati nella dispensa *Probabilità condizionata*, che riporta definizioni, schematizzazioni e proprietà, e che dovrebbe rispecchiare la sistemazione *finale* di un lavoro di indagine ed esplorazione svolto insieme alla classe.

Eppure, a volte, gli studenti si accontentano di ripetere gli enunciati, illudendosi che conoscere il nome e saper formulare una frase per descriverlo significhi possedere l'oggetto. E magari ci accontentiamo anche noi docenti, ripetendoci, sconsolati, che almeno questo lo sanno fare. Ma non è quanto dovrebbe accadere: come osserva Antonini in [Antonini, 2016], i ragazzi vanno orientati ad andare oltre, a produrre *esempi* e *controesempi*, ad esporli e a discuterli insieme; e aggiungiamo che vanno stimolati ad investigare, ad esempio, se è vero che la probabilità condizionata dell'evento A dato l'evento B è uguale alla probabilità condizionata dell'evento B dato A.

I nuovi strumenti introdotti si possono consolidare mediante il foglio di attività *7*, e si possono mettere alla prova considerando qualche problema più impegnativo, come quello proposto nella dispensa *Test clinici: sviluppi*[10] e illustrato in dettaglio in [Cappello e Mazzini, 2017, sez. 6.5]. La questione prende spunto da un fatto di cronaca[11] e si può sintetizzare in questo modo:

> *La sensibilità di un test clinico è del 99,9% (probabilità che dia esito positivo sul soggetto malato) e la sua specificità è del 99,8% (probabilità che dia esito negativo sul soggetto sano); inoltre l'incidenza della malattia è dello 0,3% (percentuale di individui malati rispetto alla popolazione). Il test ha dato esito positivo, qual è la probabilità che, in realtà, l'individuo sia sano?*

Come si vede, la situazione è ricca e si presta ad essere analizzata da varie angolazioni.

[10] Il file si può eventualmente utilizzare a supporto della lezione.
[11] https://www.repubblica.it/2008/05/sezioni/cronaca/bologna-sieropositivo/bologna-sieropositivo/bologna-sieropositivo.html

- *Modellizzare il problema*: mediante un grafo ad albero oppure mediante una tabella a doppia entrata, o, meglio ancora, con entrambi, così da guardare da due punti di vista al problema, cogliere aspetti diversi e poterli confrontare

- *Risolverlo*: si può ragionare *direttamente* sull'albero o sulla tabella, senza ricorrere a formule astratte; in sostanza si tratta di estendere i due approcci grafici introdotti già nel primo biennio ed esprimere la probabilità condizionata rispettivamente come rapporto tra la probabilità dei *cammini favorevoli* e la probabilità dei *cammini possibili* sull'albero, oppure come rapporto tra il numero degli elementi di opportune celle (nel secondo caso si ricorre all'interpretazione frequentista della probabilità)

- *Interpretare il risultato*: ossia è "grande" la probabilità di errore sul test positivo; e per questo l'esito, prima di essere comunicato al paziente, viene incrociato con quello di un test di tipo diverso, il Western Blot[12]

- G*iustificarlo*: perché la probabilità ottenuta, ossia la probabilità che l'individuo sia sano, è "grande", nonostante siano "piccole" le probabilità di errore che si deducono direttamente dalle ipotesi? Sono infatti rispettivamente 0,01% e 0,02%.
  La ragione è che la probabilità di errore sul sano, pur piccola, è applicata a *molti* e per convincersene si può ricorrere a qualche esempio numerico. Ancora una volta, discuterne è importante, e costituisce un'ulteriore occasione per sviluppare la sensibilità di cogliere "quanto" grande sia un numero e l'abitudine a valutare la coerenza di dati numerici.

Cosa dire della *formula di Bayes*, che peraltro è citata nelle Indicazioni nazionali? È una questione delicata, che va discussa con gli studenti, anche perché in varie occasioni si *sentono* più sicuri (ma lo sono davvero?) se dispongono di una formula, e la tentazione di accontentarli è forte poiché per il docente è meno faticoso fornirla.

Noi propendiamo decisamente per sfruttare l'approccio grafico sviluppato a partire dal primo biennio, che non solo conduce alla stessa espressione numerica a cui porta la formula, ma permette addirittura di ricavarla, come è mostrato nell'ipertesto [Cappello e Mazzini, 2017, sez. 6.5 pag. 9]. Alla stessa pagina sono riportate le ragioni di tale scelta:

[12] http://www.science.unitn.it/~bonaccor/blog_post-2.html

[…] sia la formula di Bayes che il nostro procedimento risolutivo concorrono allo stesso scopo pratico: fornire la probabilità (a posteriori) delle "cause", a partire dalle probabilità degli "effetti".*
*Ma se si opta per un'applicazione diretta (per non dire brutale) della formula, si rischia di ridurre il procedimento risolutivo alla pura manipolazione algebrica di simboli**. Invece, l'utilizzo di schemi grafici simili a quelli mostrati è ricco di valenze didattiche: permette di cogliere in profondità il significato di ogni passo del procedimento risolutivo, di controllarlo, nonché di ricostruirlo volta per volta, anche a lungo termine.*

** Per essere precisi, non si dovrebbe parlare di "causa" ma di evento condizionante. Esso infatti non influenza sempre l'evento condizionato, come abbiamo avuto modo di chiarire a più riprese. Comunque il ricorso a tale terminologia può servire a facilitare l'intuizione, purché sia attuato nella consapevolezza dei limiti indicati.*
*** Un approccio formale ha senso nell'ambito di una trattazione assiomatica della probabilità. Ma è opportuno che lo studente di scuola secondaria vi arrivi gradualmente: così può contare su una base di concetti a partire dai quali costruire i significati degli oggetti matematici che incontra.*

Per il consolidamento, si può fare riferimento anche alla sezione 6.6 dell'ipertesto, in cui si analizzano, ad esempio, i controlli antidoping e la vicenda giudiziaria di O.J. Simpson; gli obiettivi sono però soprattutto di natura trasversale, quali *interpretare* un testo, schematizzare la situazione mediante gli insiemi, descriverla con precisione e in modo univoco, potendo ora contare sulla notazione formale della probabilità condizionata.

Ancora contare

Per determinare il numero dei successi nello schema delle prove ripetute serve *contare* gli elementi di un insieme, ma basta saperlo fare in modo elementare, *ricostruendo* volta per volta un'espressione numerica che permetta di risolvere la questione.

Tuttavia si può approfittare dell'occasione per affinare il problema del contare gli elementi di un insieme, visto che per determinare il numero di sequenze (di prove) costituite da un dato numero di successi si ricorre, in sostanza, a tutte e tre le situazioni di base discusse nella classe prima. Si tratta solo di introdurre i termini *permutazione*, *disposizione* e *combinazione,* e la nozione di coefficiente binomiale; ma è quanto basta per facilitare la comunicazione, per descrivere in modo conciso e univoco una parte di un procedimento o un'idea, e dunque per comprendere più a fondo e per far comprendere meglio il proprio pensiero agli altri.

Riassumendo si tratta di “mettere le mani” sul problema e utilizzare i termini e i simboli essenziali, senza ridursi a scegliere da un elenco la formula da applicare e sostituire con scarsa consapevolezza alle lettere i numeri forniti nel testo; è questo che intendiamo con fare *calcolo combinatorio* nella scuola secondaria ed è in questo modo che interpretiamo l’indicazione della normativa di proporlo in classe.

L’introduzione dei nuovi termini e del nuovo simbolo si può *motivare* mediante i quesiti del foglio di attività *8*, che riguardano anche il triangolo di Pascal, e poi si può *precisare* come nella dispensa *Contare gli elementi di un insieme: sviluppi*.

Uno schema di base

L’*overbooking* è una situazione promettente per introdurre lo schema delle prove ripetute, e lo si può fare mediante una questione come questa:

> *Le compagnie aeree mettono in vendita un numero di biglietti maggiore del numero dei posti sull’aereo ma, per il regolamento CE 261/2004, devono pagare una penale ai passeggeri che restano a terra.*
> *Data la probabilità che il passeggero si presenti all’imbarco di un certo volo, e fissato il numero di biglietti venduti, maggiore del numero dei posti disponibili sull’aereo, qual è la probabilità che qualcuno non trovi posto sull’aereo?*

Per incuriosire ulteriormente gli studenti si può proporre qualche articolo che riporti episodi realmente accaduti[13], ma si può osare di più ed invitarli a *simulare* la situazione e a calarsi direttamente nei panni dei passeggeri che attendono all’imbarco, come suggerito nell’ipertesto [Danzi e Scapin, 2017, sez. Situazioni motivanti].

I *sondaggi* costituiscono un ulteriore contesto significativo e presentano caratteristiche analoghe, come vedremo nel foglio di attività 9. Quelli relativi a questioni politiche o elettorali diffuse al pubblico devono essere ospitati per legge, la *legge* n. 28 del 22/02/2000 sulla “par condicio”, su un sito gestito dal Dipartimento per l’informazione e l’editoria della Presidenza del Consiglio dei Ministri[14]; e ciò deve avvenire esplici-

---

[13] Ad esempio, un articolo pubblicato su La Repubblica e che si può leggere all’indirizzo: https://bari.repubblica.it/cronaca/2017/06/06/news/aerei_easyjet_overbooking_sul_bari-milano_offerti_200_euro_pranzo_e_hotel_per_rinunciare_al_volo-167376356/

[14] www.sondaggipoliticoelettorali.it

tando i criteri di formazione del campione, la percentuale delle persone che hanno risposto a ciascuna domanda e altri parametri significativi. Alcune rilevazioni si possono discutere in classe, facendo notare agli studenti che la matematica non si fa solo sul libro di testo, ma esce dall'aula ed è utile per descrivere ed interpretare ambiti importanti della vita sociale.

Non ci sono solo i sondaggi e l'overbooking; anche i più familiari lanci di dadi o di monete e diverse altre situazioni hanno caratteristiche analoghe, nel senso che si possono schematizzare mediante uno stesso modello, lo *schema delle prove ripetute*, costituito da un esperimento, che ha due soli esiti possibili (uno dei quali è indicato come *successo*), e da una sequenza di prove dell'esperimento, indipendenti e condotte nelle medesime condizioni. Ad esempio, nel caso dell'overbooking l'esperimento è il presentarsi della persona all'imbarco e i due esiti possibili sono "si presenta", "non si presenta", e si considera una sequenza di prove, tante quante sono le persone che hanno prenotato quel volo.

In questo contesto, la questione più importante è

determinare la probabilità di ottenere un dato numero di successi su un numero fissato di prove.

Si può discuterla insieme in classe oppure si può esaminare individualmente, ricorrendo in entrambi i casi al video[15] proposto in [Danzi e Scapin, 2017, sez. Una modellizzazione] e alla dispensa *Modello delle prove ripetute*. L'idea sottesa è di suddividere il problema in due sottoproblemi elementari, ossia determinare la probabilità di una delle sequenze richieste e contare il numero di tali sequenze, e risolverli mediante gli strumenti del calcolo combinatorio.

Su queste basi si costruirà un modello, seppur semplificato, per il problema dell'overbooking (dispensa *Overbooking*) e si analizzeranno ulteriori questioni, come quelle riportate nella dispensa *Risoluzione quesiti dall'Esame di stato* e nei fogli di attività *9* e *10*.

Approfondimenti. Si può investigare ulteriormente l'Overbooking mediante gli *esperimenti numerici* proposti nell'attività *Overbooking: alcune questioni* con il file *Overbooking.xlsx*. Aspetti più speculativi sono invece presentati nella dispensa *Prove ripetute ed eventi rari*.

Ancora nel contesto delle prove ripetute, si può compiere un ulte-

[15] https://www.youtube.com/watch?v=Kop12Tyfwvo

riore passo nella costruzione del concetto di variabile aleatoria introducendo il valor medio probabilistico, uno dei valori di sintesi che sarà approfondito in un contesto più generale nella classe quinta. Ma già ora si può congetturare una formula più efficiente, che fornisca il valor medio in termini dei parametri del modello – numero di prove e probabilità di successo nella singola prova –, e dimostrarla in qualche caso specifico, ad esempio per 3 o 4 prove.

Esplorazioni ed esperimenti materiali

Ormai gli studenti dovrebbero essere in grado di modellizzare diverse situazioni mediante lo schema delle prove ripetute e di saperlo impiegare per valutare la probabilità di semplici eventi. È già un buon risultato, ma disporre degli aspetti operativi non significa necessariamente aver compreso come è fatto *davvero* il modello e nemmeno saper dire cosa accade nella *pratica,* due questioni importanti che si dovrebbero affrontare a scuola. Tuttavia nella classe quarta ci sono anche altre competenze e altri contenuti da curare, e per questo ci sentiamo di indicare la prima come approfondimento, da posticipare eventualmente alla classe quinta.

Approfondimento. Le probabilità di ottenere un dato numero di successi si possono investigare mediante l'attività *Esperimenti numerici sulle prove ripetute*, descritta nei file *ProveRipetute1.xslx* e *ProveRipetute2.xslx*, e realizzata nella dispensa *Risoluzione esperimenti numerici sulle prove ripetute*. Altre attività sono commentate accuratamente in [Danzi e Scapin, 2017, sez. Esperimenti numerici].

In sostanza nei materiali si rappresentano i valori di probabilità sia mediante una tabella sia mediante un grafico; la tabella mostra che la probabilità di ottenere un singolo numero di successi è “piccola”, mentre è “grande” la probabilità che il numero di successi cada in un intervallo centrato nella media e sufficientemente ampio; il grafico invece fornisce un'idea immediata di come sono distribuiti i valori e, in particolare, permette di visualizzare lo scostamento dalla simmetria quando la probabilità di successo si allontana dal valore $\frac{1}{2}$.

Tuttavia queste attività operativo-sperimentali sono importanti soprattutto per altre due ragioni. Poiché preparano alle distribuzioni di probabilità, visto che inducono a considerare *contemporaneamente* tutti i valori di probabilità che caratterizzano la situazione. Ma anche perché favoriscono il passaggio *da procedura ad oggetto,* una transizione fondamentale per l'apprendimento, come abbiamo osservato più volte nel volume: infatti la tabella e il grafico mostrano il risultato finale e non il procedimento che li genera, dunque permettono di operare *direttamente* sull'oggetto, l'insieme dei valori, senza perdersi nei dettagli della sua costruzione.

Comprendere cosa accade nella pratica è l'altra questione di cui intendiamo occuparci ed è sintetizzata nella dispensa *Esperimenti materiali sulle prove ripetute*.

Possono essere d'aiuto alcuni esperimenti materiali con la tavola di Galton, il cui funzionamento è illustrato con chiarezza in un video[16] del progetto PSSC e in un video[17] ospitato sul portale Treccani. Naturalmente si dovrà tener presente che si tratta pur sempre di un dispositivo concreto, e dunque non sarà verificata con precisione la condizione che ad ogni urto con il chiodo la pallina cada a destra oppure a sinistra con la stessa probabilità, come invece richiederebbe il modello teorico delle prove ripetute. E non è nemmeno facile reperire una tavola da utilizzare in classe, ma si può sopperire con simulazioni, ad esempio quelle messe liberamente a disposizione dal progetto PhET[18] dell'Università del Colorado.

Per completare l'esame degli aspetti di base si può considerare anche *l'interpretazione geometrica* della probabilità, di cui proponiamo alcuni quesiti negli ultimi due fogli di attività, ma se ne trovano di significativi anche sui libri di testo. Un esempio di verifica sommativa sulla probabilità per la classe quarta è invece verifica 2.

2.2.3 Derivata di funzioni composte

Come abbiamo visto nel capitolo 1, riteniamo che si dovrebbe introdurre la derivata già a partire dalla classe terza; non si tratta però di esaurirne ogni dettaglio, ma di discutere alcuni aspetti elementari e di utilizzarli per affrontare varie questioni con le *funzioni base* ed eventualmente con loro somme, prodotti e quozienti. Nella classe quarta si può allargare lo sguardo ed esaminare la derivata di funzioni composte, per poter affrontare lo stesso tipo di quesiti ma per un insieme più ampio di situazioni.

Del resto, tornare a più riprese su una stessa questione permette di comprenderla più a fondo e di consolidare le conoscenze e le abilità sviluppate nell'affrontarla. Lo dice l'esperienza e lo dice da tempo la ricerca, che indica questo approccio didattico con il nome espressivo di insegnamento-apprendimento *a spirale*. A tale proposito, Bruner scrive in [Bruner, 1970]:

[16] Si tratta del video “Eventi casuali”, dal minuto 4.40 al minuto 12: https://www.youtube.com/watch?v=gryr_MPPTMU

[17] https://www.youtube.com/watch?v=lrVhv7HHm-I

[18] https://phet.colorado.edu/it/simulations/plinko-probability

[…] può essere anche affermato con certezza che i programmi di studio debbono essere impostati intorno alle più importanti "strutture", intorno cioè ai problemi e principi filosofici, logici, scientifici, artistici, umanistici che una data società considera i più importanti e i più degni di costante attenzione da parte dei suoi membri. La presentazione, in una qualche forma, di quei problemi e principi deve iniziarsi al più presto possibile e proseguire poi, allargandosi e approfondendosi sempre più durante tutti gli studi e, aggiungerei, lungo tutto il corso della vita.

E in [Bruner, 2000] precisa:

Proposi l'idea di un curriculum a spirale, l'idea cioè che nell'insegnamento di un argomento si debba partire da una spiegazione intuitiva che sia pienamente alla portata dello studente, per poi risalire con moto circolare a una spiegazione più formale e più strutturata, finché, con tutti i passaggi che possono risultare necessari, l'allievo abbia capito l'argomento o la materia in tutto il suo potere generativo.

Considerazioni analoghe sono espresse per la nostra disciplina nelle Indicazioni nazionali per il primo ciclo, [MIUR, 2012]:

La costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese; è un processo che comporta anche difficoltà linguistiche e che richiede un'acquisizione graduale del linguaggio matematico.

Non è questo l'approccio seguito di norma dai libri di testo, che spesso si preoccupano invece di *esaurire* completamente un tema prima di passare a quello successivo. D'altronde, anche se a volte noi docenti ce lo dimentichiamo, i manuali non vanno intesi come modelli didattici da seguire pedissequamente, replicando in classe quanto propongono, compreso l'*ordine* in cui sviluppano gli argomenti, ma vanno utilizzati a supporto del *proprio* percorso, anche se ciò comporta riorganizzare cronologicamente il testo e scegliere accuratamente gli esercizi da assegnare. Farlo è un buon investimento e lo è ancora di più se in classe si discutono i punti di contatto e le differenze con quanto si propone, e si condividono con gli studenti le scelte operate.

La composizione di funzioni

Per iniziare, naturalmente, si *approfondirà* la nozione di funzione composta. Lo si può fare mediante la Situazione di apprendimento *Composizione di funzioni* del progetto [Orientamat, 2006], che invita a ricorrere a tre diverse modalità di rappresentazione – sagittale, grafica e simbolica – e richiede di passare consapevolmente da una all'altra. L'attività si può svolgere individualmente e poi discutere insieme in classe, nello spirito del progetto Orientamat, e ha il valore aggiunto di mettere lo studente nelle condizioni di *apprendere* autonomamente un nuovo contenuto utilizzando ciò che sa, anche attraverso opportune domande.

Si noterà che non è certo la prima volta in cui compaiono le funzioni composte nel nostro percorso: ad esempio, sono già intervenute nella costruzione del grafico della funzione $f(x + c)$ a partire dal grafico di f o nella risoluzione della disequazione $\ln(1 - x^2) < 0$. Tuttavia solo *ora,* per calcolarne la derivata, serve aver chiaro il significato di tale nozione e disporne con sicurezza; ed è per questo che solo ora, e non nel primo biennio, ha senso fornire la definizione di funzione composta e analizzarla.

Alla ricerca di una formula

A questo punto si tratta di introdurre una formula che esprima la derivata delle funzioni composte in termini della derivata delle funzioni componenti. Gli approcci possibili sono sostanzialmente due: fornire direttamente la formula e limitarsi a curarne l'applicazione, oppure condurre i ragazzi a *ricavarla*; dovrebbe essere ormai chiaro che noi preferiamo decisamente il secondo, ma come fare?

Ripercorrere la dimostrazione formale non aiuta a comprendere *perché* intervenga proprio il prodotto delle derivate e, per di più, richiede alcuni tecnicismi. Allora ci si può accontentare di ricavare la formula in casi particolari, ad esempio per le funzioni della forma $\sqrt{f(x)}$. Oppure si può provare a *costruire* la formula nel caso generale, ragionando sui tassi medi di variazione: basta osservare che il tasso medio di variazione della funzione composta è uguale al prodotto dei tassi medi di variazione delle funzioni componenti e, di qui, si può *congetturare* che l'uguaglianza resti vera anche passando al limite, ossia valga anche per i tassi istantanei e dunque per le derivate: ecco la *chain rule*.

Certo quest'ultimo passaggio non è rigoroso[19] e ciò va comunicato ai ragazzi, ma l'approccio ci sembra adeguato per lo studente di scuola secondaria, come sostiene Tall in [Tall, 2016, pag. 315]:

> *Questo caso singolare portò i matematici a considerare necessaria una dimostrazione formale completa della regola della catena usando l'analisi epsilon-delta. Questo è parte del vasto edificio della moderna analisi*

[19] Come è chiarito in [Giusti, 1989, pag. 197], si divide e si moltiplica per una stessa quantità, e il problema è che questa può essere nulla. Inoltre notiamo che una proprietà non resta sempre vera quando si passa al limite.

matematica […]. Tuttavia è una transizione difficile per gli studenti che incontrano il calcolo infinitesimale per la prima volta. Quello che è più appropriato è […] la familiare manipolazione dei simboli dove dy/dx è il quoziente delle componenti del vettore tangente.

Anzi, più in generale, come scrive de Finetti in [de Finetti, 1959]:

Anche la preoccupazione del rigore cambia aspetto: occorre far penetrare il perché dei risultati, non farne verificare l'esattezza, il che è altra cosa, né necessaria (dove non si tratta che di passaggi materiali non vedo perché ogni principiante dovrebbe accertarsi da sé che non vi sia una svista sfuggita a tutti prima di lui), né sufficiente (perché dopo aver imparato con quali manipolazioni si ricava una formula da un'altra non è detto che si sia penetrato il contenuto di ragionamento dei passaggi eseguiti). […] perché l'importanza dell'imparare vi è sempre, come dev'essere, subordinata a quella di capire.

Un ulteriore approccio informale è proposto in un video[20] pubblicato sul canale YouTube *3Blue1Brown*, ricco di spunti significativi. Può essere un utile approfondimento per alcuni studenti.

Resta così da discutere come utilizzare operativamente la formula per calcolare la derivata di una funzione assegnata. Non è una questione banale per gli studenti: pertanto si può suggerire loro di esplicitare volta per volta le funzioni componenti e di descriverle tramite schemi grafici e nel linguaggio naturale; inoltre è importante abituarli a non identificare rigidamente la variabile indipendente con il simbolo x, ma a interpretarla come *segnaposto*. È chiaro che, dopo una prima fase, questo lavoro di precisazione verrà svolto solo mentalmente.

Le applicazioni

Il nuovo strumento sarà messo alla prova con i quesiti raccolti nei fogli di attività *11* e *12*, ma se ne trovano su ogni libro di testo. Svolgerli è anche un'occasione per modellizzare in vari ambiti e per consolidare il calcolo algebrico in un ambiente che spesso risulta stimolante per gli studenti. Ad esempio, calcolare la derivata della funzione $(1-x)^3 \cdot \sqrt{1-x^2}$ conduce a manipolare espressioni *letterali* con le radici, completando così l'esame delle operazioni con i radicali iniziato nella classe seconda con le sole espressioni *numeriche*.

[20] https://www.youtube.com/watch?v=YG15m2VwSjA

Con ciò non abbiamo dimenticato gli aspetti più formali, come la derivabilità. Tuttavia riteniamo sia più efficace esaminarli nella classe successiva, quando gli studenti avranno acquisito maggior confidenza con la nozione di derivata, ma anche di limite e di continuità, per averne fatto esperienza in varie situazioni. Come abbiamo indicato, sono altre le questioni che ci sembra importante esaminare in questa fase del percorso, e una loro sintesi è offerta dall'esempio di prova verifica *3*.

2.2.4 Successioni aritmetica e geometrica, ma non solo

Due successioni notevoli

Lo studente acquisirà la conoscenza di semplici esempi di successioni numeriche, anche definite per ricorrenza, e saprà trattare situazioni in cui si presentano progressioni aritmetiche e geometriche.

È quanto prevedono le Indicazioni nazionali, che menzionano esplicitamente le due successioni mediante le quali si *modellizzano* molti fenomeni di crescita. Esse, di fatto, sono già intervenute nel nostro percorso, prima nel contesto delle percentuali e delle funzioni lineari, poi nell'ambito della funzione esponenziale; ora ci sembra opportuno approfondirle e attribuire loro un nome, consolidando così anche la conoscenza delle funzioni coinvolte.

Le progressioni aritmetiche e geometriche si possono caratterizzare in più modi: mediante la *regola di spostamento* – discussa nella sezione 1.2.4 di questo volume –, mediante gli *invarianti* – è costante rispettivamente la differenza tra due termini consecutivi o il loro rapporto –, mediante il *termine generale* – che si può esprimere anche per *ricorrenza*, traducendo in simboli la regola di spostamento.

Se questi non sono aspetti nuovi rispetto alla classe terza, c'è invece una significativa questione che non è ancora stata considerata nel percorso: determinare la somma dei primi n termini di ciascuna progressione. Ora, nel caso delle progressioni aritmetiche si può ricorrere al ben noto procedimento di Gauss, osservando che la somma di due termini posti a uguale distanza dal "centro" della sequenza è una costante della sequenza. Per le progressioni geometriche si può invece seguire la Situazione di apprendimento *Serie geometrica*, che abbiamo realizzato nell'ambito del progetto [Orientamat, 2006], e impostare un'equazione che abbia come incognita la somma richiesta.

La questione permette così di innescare l'*attivazione* degli studenti e lo consente anche il foglio di attività *13*, in cui i nuovi strumenti vengono impiegati, tra l'altro, per esaminare l'importo delle rate di un mutuo e l'andamento degli spazi percorsi ogni secondo nel moto di caduta libera.

La serie geometrica

Esaminate le somme di un numero finito di termini si può studiare la somma infinita

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots,$$

orientando la discussione attorno a due domande:

Cosa significa tale "somma"?
Quanto vale la "somma"?

Come proposto nella seconda parte della Situazione di apprendimento *Serie geometrica,* conviene considerare prima i casi notevoli $a = \frac{1}{2}$ e $a = 2$ e investigare l'andamento delle somme parziali intrecciando opportunamente tabelle di numeri e schemi grafici. Per *visualizzarle*, nel caso $a = \frac{1}{2}$ si può rappresentare il primo addendo disegnando un segmento unitario, e poi ogni addendo successivo tracciando di seguito la metà del segmento che manca "per arrivare a 2"; si ottiene così una descrizione evocativa e convincente, che si può integrare con quella offerta dall'attività descritta nel file *SerieGeometrica.ggb*.

In definitiva, è ragionevole decidere che la somma infinita è il *limite* delle somme parziali; la somma si può poi calcolare a partire dall'espressione generale ricavata in precedenza nel caso di un numero finito di termini. In questa fase gli studenti si appoggeranno ad un'*idea* intuitiva di limite di una funzione all'infinito, che dovrebbero aver sviluppato anche nel costruire i *grafici* delle funzioni base e nello *stimarne* l'andamento per valori "grandi" della variabile indipendente. Anzi, senza addentrarci in dettagli, ci piace pensare che proprio l'esplorazione della serie geometrica contribuisca a familiarizzare con il concetto di limite e faccia emergere le due idee chiave, *approssimare* e *quanto si vuole*, che saranno riprese nel segmento successivo del percorso in cui verrà formalizzato rigorosamente.

Un esercizio in cui si utilizza la serie geometrica è individuare una frazione equivalente ad un allineamento decimale periodico: basta sfruttare il significato della notazione posizionale per esprimere il numero dato mediante un'opportuna somma infinita. È un procedimento che a prima vista può apparire sofisticato, ma è formativo soprattutto poiché consente di impiegare *in situazione* il significato della notazione posizionale, che altrimenti rischia di rimanere vago per gli studenti.

Questa ed altre questioni, come l'accumulo di radiazioni nell'organismo, sono esaminate nella nostra Situazione di apprendimento e nel foglio di attività *14*. Ma la serie geometrica può servire anche per analizzare la celebre curva fiocco di neve di Koch e mostrare che ha perimetro infinito e area finita, come avviene nella lettura [Castelnuovo, 1993, da pag. 159 a pag. 164]. Non è sorprendente?

Approfondimento. Eventualmente in collaborazione con il docente di filosofia, si può ricorrere alla serie geometrica per investigare i classici *paradossi* di Zenone sul moto, anche se generalmente si affrontano nella classe terza. Se ne accenna nell'attività Orientamat e se ne discute con semplicità e chiarezza nella lettura [Castelnuovo, 1993, a pag. 173 e 174].

La questione va affrontata con cautela, anche perché si rischia di farne alcune riduzioni errate, come mette in guardia Bernardi in [Villani, 2012, pag. 25]:

> *Qualche volta si aggiunge che il paradosso nasce perché Zenone non conosceva le serie; il che è scorretto sul piano storico e filosofico.*
> *[…] Per spiegare il paradosso con le serie, occorre accettare intervalli di tempo e spazio sempre più piccoli, il che non è scontato.*

Inoltre, secondo vari critici, Zenone non intende negare il moto, piuttosto vuole mostrare come assumere che il punto abbia "una dimensione" o, in altre parole, sia un "punto-granello", porti ad un assurdo. Lo precisa la Castelnuovo nella lettura appena indicata, ed è espresso chiaramente in [Lombardo Radice, 2014, pag. 41]:

> *A nostro parere Zenone non voleva dimostrare l'impossibilità del moto, ma ridurre all'assurdo la tesi dei pitagorici, che componevano il continuo con atomi (punti) di dimensione finita. Nella ipotesi pitagorica, infatti, la somma di un numero crescente di segmenti, anche se decrescenti, sempre più piccoli, dovrebbe tendere comunque all'infinito, perché ciascuno conterrebbe un numero intero di atomi dotati di dimensione (sarebbe come fare la somma di infiniti numeri interi, che tende certamente all'infinito)*.

… e oltre

Senza nulla togliere alla centralità della serie geometrica, dare un rapido sguardo ad altre somme infinite permette di formarsi una visione più precisa delle serie e di non generalizzare proprietà che valgono solo nel caso speciale esaminato.

Si può allora considerare la *serie armonica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e dimostrarne la divergenza minorando blocchi di addendi consecutivi con la quantità $\frac{1}{2}$; è un esempio notevole che mostra come una serie può non convergere anche se il termine generale tende a 0. Rimandiamo invece alla classe quinta e al calcolo integrale la discussione del caso generale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$; piuttosto in quarta è interessante soffermarsi sulla serie che si ottiene per $\alpha = 2$, calcolare il valore di alcune somme parziali ed eventualmente suggerire l'idea di come si può dimostrare la sua convergenza[21].

2.2.5 Misuriamo l'infinito: un approfondimento

È un tema ricco che si può affrontare a vari livelli di profondità, ma che proponiamo come approfondimento poiché non è strettamente necessario nel percorso che abbiamo previsto per il liceo scientifico; eppure, lo vedremo, concorre a fornire un'idea più completa della matematica che si può fare a scuola.

Approfondimento. La questione è delicata, era citata nei programmi del Piano Nazionale per l'Informatica [MPI, 1996][22], ma non compare *esplicitamente* nelle Indicazioni nazionali, anche se si può scorgere un riferimento negli Obiettivi specifici di apprendimento per il secondo biennio:

[…] studierà la formalizzazione dei numeri reali, anche come introduzione alla problematica dell'infinito matematico (e alle sue connessioni con il pensiero filosofico).

Le ragioni per guardare all'infinito, nell'accezione di distinguere le diverse cardinalità, sono di varia natura. Innanzitutto affinare l'abilità di comprendere e *produrre dimostrazioni* – un lavoro fondamentale, iniziato ancora nella classe prima –, consolidare aspetti della *logica* – ad esempio, negare un'affermazione e utilizzare i quantificatori –, ma anche approfondire il significato di definizione all'interno di una *teoria* matematica – come quella di insieme infinito. Inoltre il tema offre l'occasione di discutere rilevanti *aspetti storici* della matematica e di farlo in un ambito significativo ed *intrigante*, al punto che Hilbert nel 1921 scriveva:

L'infinito! Nessun altro problema ha mai scosso così profondamente lo spirito umano; nessuna altra idea ha stimolato così profondamente

---

[21] Precisamente, si può ricorrere alla maggiorazione $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ per $n > 1$ e alla convergenza della serie telescopica $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

[22] I programmi per il triennio del PNI sono entrati in vigore a partire dall'anno scolastico 1989/90 e la sperimentazione è terminata nell'anno scolastico 2009/10. Precisamente, al punto 2.l del tema n. 2 per il triennio è indicato:
Confronto tra insiemi infiniti.
E nel commento allo stesso tema si trova:
Il confronto tra insiemi infiniti dovrà far risaltare la potenza del numerabile e quella del continuo.

il suo intelletto; e tuttavia nessun altro concetto ha maggior bisogno di chiarificazione che quello di infinito.

Un ottimo riferimento è il testo [Paola et. al, 2017, da pag. 31 a 33], adatto pure agli studenti, mentre è per il docente il saggio [Lombardo Radice, 2014], anche se diverse parti sono comunque alla portata dei ragazzi.

Chiariti questi diversi aspetti, ci proponiamo di illustrare cosa secondo noi è rilevante discutere nella classe quarta e come farlo.

Dal contare al confrontare

La questione di partenza si può sintetizzare in questo modo:

Come si può determinare il numero di elementi di un insieme?

Se l'insieme è finito si può *contare*, nel senso comune del termine ("uno, due, tre,…, *n*"); ma se l'insieme è infinito, come si può rispondere a tale domanda e cosa vuol dire *numero di elementi*? L'idea è di passare dal contare gli elementi dell'insieme al *confrontare* l'insieme con un altro, e ciò si traduce formalmente con lo stabilire se esiste una corrispondenza biunivoca tra i due; in tal caso si dirà che i due insiemi hanno lo stesso numero di elementi.

Operativamente la prima parte della nostra indagine si può organizzare in più tappe: precisata la nozione di *funzione biunivoca,* si investigheranno le corrispondenze tra insiemi infiniti, facendo riferimento alla visione intuitiva, e magari ingenua, di infinito che hanno gli studenti. Ci si imbatterà così in vari *paradossi* e precisamente in fatti che valgono per insiemi infiniti ma non per insiemi finiti; ora, si utilizzeranno proprio questi fatti incredibili per dare una *definizione* di insieme infinito.

Vediamo allora più nel dettaglio come si può articolare questa parte del percorso, premettendo che utilizzeremo il termine paradosso nel senso che Bernardi indica in [Villani et al., 2012, pag. 25], al punto b):

La parola paradosso assume almeno tre significati:
a) una contraddizione (si parla, in questo senso, anche di antinomia);
b) un'affermazione che sembra molto strana, che è in contrasto con le nostre aspettative, ma in realtà è corretta;
c) un ragionamento che sembra impeccabile, ma contiene un errore e porta ad una conclusione assurda.

Uno dei più significativi è quello proposto da Galilei nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* del 1638: l'insieme dei numeri naturali è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei loro quadrati. Ma come è possibile, visto che «il tutto è maggiore della parte»? Lo scriveva già Euclide negli *Elementi,* indicandolo come *quinta nozione comune* per la sua presunta evidenza.

Oltre al paradosso parte-tutto, ce ne sono altri la cui dimostrazione è alla portata degli studenti; tuttavia, per non appesantire l'esplorazione e per non correre il rischio di confondere i ragazzi con troppi dettagli, si può valutare di esaminarli in seguito. Si tratta dei paradossi illimitato-limitato e dimensione due-dimensione uno, ossia rispettivamente della corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali e un suo intervallo limitato, e di quella tra il quadrato ed un suo lato. Incredibile. «Lo vedo ma non ci credo» scrive infatti Cantor nel 1877, proprio dopo aver dimostrato quest'ultima corrispondenza.

L'aspetto per noi rilevante è che questi fatti sorprendenti non valgono per gli insiemi finiti e pertanto si possono utilizzare per *definire* gli insiemi infiniti; al paradosso parte-tutto ha proposto di ricorrere Dedekind nella sua definizione del 1872.

Confrontiamo gli insiemi numerici fondamentali

Dopo aver posto la questione in questi termini e aver discusso gli aspetti generali, si entrerà nello specifico e si *confronteranno* gli insiemi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ con il più piccolo degli insiemi infiniti, l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, ricostruendo assieme agli studenti i classici procedimenti grafici di enumerazione dell'insieme dei numeri interi e dell'insieme dei numeri razionali. In realtà, per sfruttare appieno le potenzialità offerte dal ricco contesto, riteniamo che si possa andare oltre e invitare i ragazzi a *produrre* autonomamente alcune dimostrazioni elementari: ad esempio, costruire funzioni biunivoche tra due insiemi dati oppure valutare se sono biunivoche alcune funzioni assegnate, come proponiamo nel foglio di attività *15* e nel video[23], realizzato con il Laboratorio DiCoMat.

Non è tutto. La questione si può interpretare in modo suggestivo mediante il celebre albergo dotato di infinite stanze ideato da Hilbert nel 1920: la vicenda è descritta con chiarezza nella lettura a fumetti [Osenda, 2009] e nel racconto *L'hotel straordinario* in [Bartocci, 2006], che gli studenti possono esaminare attivamente attraverso le domande poste nell'attività *L'albergo di Hilbert*.

A questo punto i ragazzi potrebbero pensare che tutti gli insiemi infiniti siano numerabili e dunque che tutti gli insiemi infiniti abbiano lo stesso numero di elementi. Si *accennerà* allora al procedimento diagonale di Cantor, che mostra come l'insieme dei numeri reali *non* sia in

[23] http://laureescientifiche.science.unitn.it/simulazione_risorse/quesito-19.html. Il video, come gli altri analoghi prodotti con il Laboratorio DiCoMat, è accompagnato da una risoluzione scritta e da alcuni approfondimenti per lo studente.

corrispondenza biunivoca con quello dei numeri naturali e, in questo senso, abbia più elementi. La dimostrazione vera e propria è riservata agli studenti solidi, che possono far riferimento a [Paola et al., 2017 pag. 22, 23]; tuttavia si può condividere con tutti una versione semplificata, sostituendo agli allineamenti decimali le più innocue sequenze di pallini di due colori, come avviene nel laboratorio “Pallini”, disponibile sul sito di Ester Dalvit [Dalvit, 2022].

E con ciò riteniamo di aver realizzato l'obiettivo iniziale di misurare gli insiemi infiniti e di discutere gli aspetti che ne scaturiscono, ad un livello adeguato per lo studente della scuola secondaria di secondo grado. Tuttavia, a seconda del contesto classe, si può completare l'indagine accennando all'ipotesi del continuo e al fatto che $\mathbb{R}$ non è l'insieme più numeroso ma che si possono costruire insiemi dotati di più elementi, nell'accezione illustrata in questo blocco.

Anche questa parte del percorso interviene nell'esempio di prova verifica *4*, che è incentrato sulla serie geometrica e sulla determinazione dell'insieme di definizione delle funzioni, argomento quest'ultimo di cui diremo nel prossimo paragrafo. Naturalmente la misura dell'infinito vi compare quale approfondimento, ma alcune nozioni coinvolte, ad esempio la biiettività di una funzione, sono fondamentali e dovrebbero essere ugualmente esaminate in classe e considerate nella verifica anche se non si fossero affrontati tutti gli aspetti indicati in questa sezione.

2.2.6 Finalmente i limiti

Come pianificare il percorso? Completare prima l'esame dei limiti all'infinito e solo in seguito considerare i limiti al finito, oppure discutere contemporaneamente i due casi? Partire dai limiti di successioni oppure da quelli di funzioni?

Sono queste le principali opzioni che si presentano e, sperimentandole in classe, ci siamo resi conto che ciascuna di esse comporta sia vantaggi sia difficoltà; pertanto, per decidere quali seguire, conviene basarsi soprattutto sulla propria sensibilità didattica, anche in relazione alla situazione della classe. In questa sezione comunque una scelta la faremo, visto che analizzeremo contemporaneamente i limiti all'infinito e al finito, iniziando dai limiti di funzioni; ma, lo ribadiamo, ciò non significa che questo sia l'approccio migliore in assoluto. Peraltro i limiti di successioni sono già comparsi nel nostro percorso, sebbene in modo informale come nel caso della serie geometrica, e interverranno già nelle prime esplorazioni sul comportamento di semplici funzioni vicino agli estremi del loro insieme di definizione, ma anche nella stima dell'andamento delle funzioni base, come preciseremo a breve.

Ma prima l'insieme di definizione di una funzione

Per studiare i limiti è necessario saper individuare con sicurezza l'insieme di definizione di una funzione. È una questione che abbiamo già discusso in varie occasioni nel percorso e lo abbiamo fatto sostanzialmente nei due ambiti che seguono.

- Nel risolvere equazioni e disequazioni e, in qualche caso, nell'individuare i valori di una variabile per i quali è definita una *formula*

- Nei problemi di *ottimizzazione*. Pensiamo, ad esempio, al problema di trovare il cilindro di massimo volume, fissato il valore della superficie totale; se studiamo il volume in funzione del raggio di base, questo vincolo determina un intervallo nel quale può variare il raggio. In generale, dunque, si tratta di stabilire quale funzione modellizza il problema e quali valori può assumere, nel contesto del problema, la variabile indipendente che compare in questa funzione.

Ora ci sembra il momento di affrontare in modo più *sistematico* la questione, considerandola come problema specifico da discutere sull'intero panorama delle funzioni note agli studenti[24].

Queste considerazioni sono alla base del foglio di attività *16*, che consente, tra l'altro, di consolidare la risoluzione dei vari tipi di equazioni e disequazioni esaminati nel percorso. Naturalmente sono utili anche gli esercizi che si trovano su ogni libro di testo, purché non siano troppo articolati – il che li rende artificiali agli occhi degli studenti –, non siano suddivisi rigidamente in compartimenti stagni – prima le funzioni razionali, poi le irrazionali… – e non si abbia fretta di proporli già nel primo biennio – ad esempio, già nel capitolo sui radicali nella classe seconda –, poiché i ragazzi non ne intravedono ancora l'utilità.

Quali motivazioni per i limiti?

I limiti sono già intervenuti in varie occasioni nel nostro percorso: nella definizione di derivata, nella rappresentazione qualitativa dei grafici di alcune funzioni, nello studio delle somme infinite. Tuttavia li abbiamo considerati in modo informale, facendo appello all'intuizione e non ad una qualche definizione; ora ci sembra opportuno *precisare* cosa sono e come operano, per le ragioni che possiamo sintetizzare come di seguito e che naturalmente è bene discutere con gli studenti.

---

[24] Preferiamo procedere per gradi e non considerare in questa fase le funzioni trigonometriche inverse e nemmeno le funzioni della forma $f(x)^{g(x)}$.

- Per *descrivere* con precisione il comportamento di una funzione agli estremi dell'insieme di definizione ed *indicarlo* in modo conciso ed espressivo. Ad esempio, il comportamento all'infinito della funzione $P(t) = \dfrac{ke^t}{k-1+e^t}$, dove $k > 0$, che modellizza la crescita di alcune popolazioni al tempo t, oppure l'andamento della quantità di moto relativistica $p(v) = \dfrac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ per velocità v prossime a quella della luce.

- Per *tracciare il grafico* qualitativo di una funzione a partire dalla sua espressione. Certo il software aiuta, ma non è sempre facile interpretare le rappresentazioni che fornisce; ad esempio, pur ricorrendo allo *zoom*, con GeoGebra non è immediato congetturare i valori a cui tendono le funzioni $f(x) = \dfrac{x^2+10x}{x^2+1}$ e $g(x) = \dfrac{x}{50\sqrt{x}+1}$ per x "grandi". In ogni caso, l'immagine prodotta è pur sempre costituita da un numero *finito* di punti, e dunque non permette di stabilire con sicurezza il comportamento della funzione fuori dall'intervallo considerato.

- Perché quella di limite è una nozione *fondamentale*. Precisarla permette da una parte di *comprendere* meglio le situazioni già esaminate in cui essa interviene ma anche la definizione di integrale, e dall'altra di discutere aspetti più delicati, quali la continuità delle funzioni (entrambe questioni di cui ci occuperemo nella classe quinta), poiché fornisce le idee e le parole per farlo.
  Del resto, l'ordine seguito nel percorso è essenzialmente quello in cui si è sviluppata *storicamente* la nozione di limite: prima è stata utilizzata in modo informale e solo dopo alcuni secoli, nel 1872 con Heine, è stata sistemata rigorosamente secondo i canoni condivisi ancora oggi dalla comunità dei matematici.

Non ci sembrano invece adeguate per lo studente di scuola secondaria le questioni che spesso pongono i libri di testo per iniziarne lo studio. Davvero ha senso *partire* dal calcolo del limite $\lim_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$? Con ciò non intendiamo dire che non sia importante, anzi, tale limite esprime la definizione di derivata della funzione x^2 nel punto $x_0 = 1$ e perciò va discusso nel percorso; non però all'inizio, quando lo studente non dispone ancora di un bagaglio di esempi e di esperienze per apprezzarlo. Al riguardo Villani precisa in [Villani, 2003a]:

> *Gli esempi addotti nei libri di testo per illustrare la definizione di limite sono di una banalità estrema, che rischia di essere addirittura fuorviante. Di fronte ad esempi del tipo* $\lim_{x\to2} x^2+3x-7$ *o* $\lim_{x\to3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$*, tutti gli studenti, da quello più interessato a quello più sprovveduto, si rendono*

conto che il valore del limite può essere calcolato semplicemente sostituendo nella funzione (se necessario riscritta in forma semplificata) l'ascissa del punto limite al posto della variabile x.

Non solo calcoli

Lo dicono le Indicazioni nazionali negli Obiettivi specifici di apprendimento, che però collocano i limiti al quinto anno:

[Lo studente] Acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici.

Insomma, richiedono di prestare attenzione anche alla costruzione del *concetto*. È una questione delicata e sono note in letteratura le difficoltà che incontrano gli studenti nel farlo: oltre alle misconcezioni, che esamineremo nel seguito, e alla complessità della struttura logica della definizione, dovuta alla presenza di quattro quantificatori, sembra esserci uno scarto tra l'idea intuitiva di limite e la sua formalizzazione rigorosa. Lo chiarisce Zoccante in [Villani et. al, 2012, pag. 118 e 119], dove approfondisce alcune sfaccettature di questa contrapposizione e le sintetizza con i termini operazionale/strutturale, dinamico/statico, costruttivo/di verifica, strumentale/logico-fondazionale, geometrico/numerico.

Pertanto è opportuno procedere *per gradi* e prima investigare *informalmente* i casi fondamentali che si possono presentare: limiti all'infinito, finiti e infiniti, e limiti infiniti al finito; l'opzione limite finito al finito è invece più delicata e si può esaminare in seguito.

Per iniziare si può sondare il comportamento di alcune semplici funzioni per x "grandi", ad esempio $\frac{1}{x}+2$ e $\sqrt{x}$, e di funzioni quali $\frac{1}{x^2}$ o $\ln x$ per x "vicini" a zero, analizzando porzioni del grafico e tabelle di valori della funzione. Ecco allora che, per precisare il loro andamento, si utilizzerà la nozione di limite e la sua notazione, e si chiarirà un po' il significato di tale scrittura mediante descrizioni del tipo:

f(x) si "avvicina" con precisione a piacere ad L, per x "sufficientemente" grande.

Con lo stesso approccio si può esaminare poi il comportamento delle funzioni base e congetturare i loro limiti agli estremi dell'insieme di definizione. Ed è importante anche individuare i limiti significativi suggeriti da un dato grafico e, all'inverso, tracciare un possibile grafico di una funzione di cui sono assegnati opportuni limiti (foglio di attività *17*). Si riprende e si amplia così il lavoro sui grafici, iniziato ancora nella classe seconda, con l'esame degli zeri e del segno, e continuato nella classe terza, con lo studio, mediante la derivata, della crescenza, decrescenza ed estremi locali.

Discussi gli aspetti qualitativi, è importante compiere un ulteriore passo e precisare *quantitativamente* il significato dei termini che compaiono nella descrizione informale di limite.

Si possono allora effettuare alcune *stime* e cercare il più piccolo (o il più grande) *intero* per il quale il valore della funzione cade in un dato intorno del limite, come si propone nel foglio di attività *18*. La richiesta che il numero sia intero è cruciale, poiché induce lo studente a non limitarsi a fornire la soluzione di un'equazione, ma a *riflettere* sul suo significato e ad interpretarla, magari con l'aiuto del grafico, per precisare l'andamento della funzione; insomma non basta applicare meccanicamente una procedura.

Questi aspetti sono sintetizzati nella dispensa *Limiti: un approccio informale*, con i file[25] *Limiti1Assex.ggb*, *Limiti2Assex.ggb*, *Limiti3aAssex.ggb* e *Limiti3bAssex.ggb*, che aiutano a visualizzare la situazione. La formulazione è volutamente non rigorosa, e questo va comunicato agli studenti ed è precisato dall'uso delle virgolette per indicare i termini che fanno riferimento alla sola intuizione.

Stiamo semplificando troppo? A noi non sembra, e comunque si tratta solo di un primo approccio alla formalizzazione, visto che poi discuteremo la definizione vera e propria. D'altra parte i canoni del rigore in matematica non sono assoluti ma si evolvono nella storia, e questo vale anche per la nozione di limite; infatti la nostra formulazione ricorda quella proposta nel 1821 da Cauchy nel *Cours d'analyse algebrique*:

> *Quando i valori successivamente attribuiti ad una stessa variabile si avvicinano indefinitamente ad un valore fissato, in modo da finire per differirne tanto poco quanto si vorrà, quest'ultimo è chiamato il limite di tutti gli altri.*

All'epoca il testo era considerato *rigoroso*, come scrive Bottazzini in [Bottazzini, 1981, pag. 98]:

> *[…] questo volume di Cauchy […] diventava il manifesto della «nuova» analisi, un libro «che deve essere letto da ogni analista che ami il rigore nelle ricerche matematiche» come scrisse Abel (1826).*

[25] Realizzati da Michele Avancini, come quelli relativi alla dispensa successiva.

E lo era anche nelle intenzioni dell'autore, che addirittura riteneva di aver raggiunto il rigore definitivo in analisi ([Klein, 1999a, pag. 1107]). Ma in seguito, come abbiamo visto riflettendo sull'introduzione della derivata nella classe terza, la definizione è stata riesaminata criticamente, considerata inadeguata e sostituita dalla formulazione mediante gli ε-δ, che è ancora tra quelle accettate dalla comunità dei matematici.

Oltre a descrivere il significato di limite, nella dispensa si mette in discussione il tipico misconcetto secondo il quale il grafico non può incontrare l'asintoto orizzontale. Probabilmente ciò è frutto di un'immagine stereotipata della nozione di limite, ridotta al comportamento della funzione $\frac{1}{x}$ all'infinito, e sembra essere piuttosto radicato, al punto che J.B. D'Alembert nel 1757 alla voce "Limite" dell'*Encyclopédie* scriveva:

> *A dire il vero, il limite non coincide mai, o non diventa mai uguale alla quantità della quale è il limite, ma questa le si avvicina sempre di più, e può differirne così poco quanto si vorrà.*

Su queste basi gli studenti dovrebbero essere pronti per discutere la definizione *formale* di limite, facendo riferimento alla dispensa *Definizione di limite* con i file *Limiti1Assey.ggb* e *Limiti2Assey.ggb*, anche se non è necessario farlo proprio in questa fase del percorso. In ogni caso ci si soffermerà soprattutto sui limiti all'infinito e si considereranno questioni analoghe a quelle proposte nella seconda parte del foglio di attività *18*, ossia del tipo:

> *Prova ad indicare quale limite è definito in questo modo*:
> $$\forall M\ \exists c: x < c \Rightarrow f(x) > M.$$

Lo scopo di questo lavoro non è che gli studenti sappiano ripetere una definizione, ma che comprendano più a fondo la nozione di limite, dovendola precisare formalmente, e nel contempo sviluppino abilità importanti anche in altri contesti, quali *interpretare* un testo espresso mediante i simboli specifici e *comunicare* nel linguaggio proprio della disciplina.

Per analoghe ragioni, riteniamo che nella scuola secondaria si possa tranquillamente evitare di verificare il valore di un limite mediante la definizione; come abbiamo visto prima, è molto più formativo stimare il valore della funzione sui numeri interi, e semmai gli studenti dovessero affrontare la questione più avanti nel corso di studi (assistendo ad una lezione o consultando un testo), confidiamo che gli strumenti sviluppati in questo percorso permettano loro di comprendere come farlo.

Calcolo di limiti: i primi passi

Come scrivono le Indicazioni nazionali, è opportuno ridurre il calcolo dei limiti a

casi semplici

anche se non ci sembrano tutti semplici i quesiti proposti nelle prove degli Esami di stato per il Liceo scientifico. Ad esempio, non lo è secondo noi il quesito 4 del tema assegnato nella sessione ordinaria dell'anno 2018 [MIUR, 2018a]:

Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x}$, *determinare, se esistono, i valori di* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, *giustificando adeguatamente le risposte fornite.*

In realtà, il *tipo* di richiesta è indubbiamente ragionevole, visto che induce a "mettere le mani" sulle funzioni che compaiono senza seguire procedure standard; semmai sono troppo articolate le espressioni del numeratore e del denominatore: forse bastavano meno addendi per ottenere lo stesso scopo.

Prima di esaminare aspetti specifici del calcolo conviene osservare che, per le funzioni elementari[26], il valore del limite per x che tende ad un punto *c dell'insieme di definizione* è il valore della funzione nel punto, ossia vale $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ (dispensa *Limiti: aspetti di calcolo*). Questo fatto esprime la continuità delle funzioni elementari, ed è importante che gli studenti ne siano consapevoli fin da subito, anche se lo approfondiranno solo più avanti nel percorso. E da questo fatto segue che i *limiti significativi* delle funzioni elementari, ossia quelli che non si calcolano semplicemente determinando il valore della funzione nel punto, sono i limiti agli estremi dell'insieme di definizione che non appartengono ad esso; pertanto è di questi che ci occuperemo.

Per iniziare si possono studiare le cosiddette *forme determinate*. I libri di testo di solito ne esaminano molte, ma secondo noi le uniche da approfondire sono "$\frac{k}{\infty}$" e "$\frac{k}{0}$", dove[27] $k \neq 0$ nel secondo caso; le altre sono immediate e gli studenti dovrebbero riuscire a determinarne il valore volta per volta quando le incontrano, basandosi su considerazioni

---

[26] Ossia una funzione base oppure una funzione che si ottiene dalle funzioni base con le operazioni di addizione (sottrazione), moltiplicazione (divisione) e composizione.

[27] Con la notazione "$\frac{k}{\infty}$" si indica in modo compatto la seguente situazione: si intende calcolare $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ (x \to a)}} \frac{f(x)}{g(x)}$ e vale $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ (x \to a)}} f(x) = k$, $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ (x \to a)}} g(x) = \infty$. In modo analogo si devono intendere le altre scritture dello stesso tipo che compaiono nel testo.

intuitive e non su un lungo elenco di risultati. Questo è in sostanza l'approccio con cui dovrebbero calcolare i limiti raccolti nel foglio di attività *19*.

A questo punto si può passare ad *investigare* le forme "$\frac{\infty}{\infty}$", "$\frac{0}{0}$", "$0 \cdot \infty$" e "$+\infty-\infty$", magari a partire da alcune domande quali:

È vero che se un limite è della forma "$\frac{\infty}{\infty}$", allora vale 1?
E se un limite è della forma "$+\infty-\infty$", vale 0?

Gli studenti dovrebbero accorgersi che si tratta di situazioni diverse da quelle esaminate prima, visto che ora il limite richiesto non è più univocamente determinato dal solo valore del limite del numeratore e del denominatore e, più in generale, dai limiti delle singole funzioni che intervengono (di qui il nome di forme *indeterminate*). Tuttavia l'intuizione, per quanto importante, non basta: è necessario andare oltre, ricercare le ragioni sottese a tali fatti e provare ad organizzare una giustificazione rigorosa, costruendo opportuni *controesempi* per ciascuna delle quattro forme.

Calcolo di limiti e grafici di funzioni

Una volta compreso il quadro generale si può entrare più nel dettaglio e discutere come calcolare i limiti che si presentano in tali forme indeterminate, iniziando magari dalle funzioni *razionali* e *irrazionali* e dalla forma "$\frac{\infty}{\infty}$" ed estendendo poi le idee sviluppate in questo caso notevole alle altre funzioni e alle altre forme indeterminate.

Già in questa situazione si può determinare il valore del limite ragionando direttamente sulla rapidità di crescita all'infinito delle funzioni base coinvolte, senza dover applicare ogni volta il classico procedimento algebrico proposto nei manuali, che consiste nel raccogliere l'addendo di grado maggiore a numeratore e a denominatore. Tale manipolazione resta comunque utile per giustificare l'approccio basato sugli ordini di infinito e per chiarire eventuali dubbi (ad esempio, è sempre corretto considerare solo i termini di grado maggiore?), perciò è bene che i ragazzi la conoscano e la utilizzino quando serve; tuttavia, lo ribadiamo, precisare il valore del limite dovrebbe essere frutto di un'accurata riflessione e non dell'applicazione meccanica di una procedura.

La forma "$+\infty-\infty$" si può esaminare in modo analogo e non ha bisogno di ulteriori commenti; invece la forma "$\frac{0}{0}$" richiede un approccio diverso, e per questo pensiamo vada affrontata più avanti, nelle modalità che chiariremo nella prossima sezione.

Un'ulteriore differenza rispetto ai libri di testo è che preferiamo non esaurire il calcolo dei limiti prima di applicarlo alla *costruzione* dei *grafici* delle funzioni, ma proponiamo di affrontare in parallelo le due questioni, poiché si motivano e arricchiscono a vicenda. Per questo nei fogli di attività *20* e *21* richiediamo di utilizzare i limiti fin da subito per tracciare il *grafico* di semplici funzioni razionali e irrazionali e per discutere modelli significativi, come l'energia potenziale di Lennard-Jones e la quantità di moto relativistica.

Su queste basi si può passare ad esaminare le funzioni *esponenziali* e l*ogaritmiche* e i loro *limiti*. In questo contesto una delle questioni più importanti è estendere la discussione sugli *ordini di infinito:* ancora una volta gli studenti sondano il comportamento all'infinito delle funzioni e^x, x^a, $\ln x$ mediante un approccio operativo-sperimentale, considerando i rapporti tra due qualsiasi di esse e analizzando tabelle di valori e porzioni del grafico; si possono così rendere conto che tali funzioni crescono con velocità diverse e dovrebbero riuscire a congetturare una "gerarchia" di infiniti, come precisato nella dispensa *Limiti: ulteriori aspetti di calcolo* con il file *OrdiniInfinito.ggb*. A questi risultati faranno poi riferimento per calcolare limiti di funzioni costruite con funzioni base di diverso tipo; più avanti potranno eventualmente ricorrere al teorema di de l'Hôpital, uno strumento potente che servirà anche per dimostrarli, ma non è meglio che in casi elementari sappiano prevedere il valore del limite e giustificarlo rapidamente, invece di ricavarlo come risultato di un calcolo?

Per prendere confidenza con questi aspetti, con la forma indeterminata "$0 \cdot \infty$" e con questioni analoghe a quelle proposte per le funzioni razionali e irrazionali, si può ricorrere ai fogli di attività *22* e *23*. Invece per il consolidamento, oltre a semplici studi di funzione che si trovano su qualsiasi libro di testo, si può far riferimento al foglio di attività *24*, che riporta esercizi relativi ai principali aspetti di calcolo esaminati fino qui, mentre un esempio di prova è verifica *5*.

Alcuni passi avanti

Ricapitolando, abbiamo investigato il significato di limite quale oggetto matematico con cui formalizzare il comportamento di una funzione all'infinito o in prossimità di un punto, abbiamo discusso come calcolarne il valore in casi elementari, e lo abbiamo utilizzato per tracciare grafici di funzioni e per analizzare semplici modelli. Insomma abbiamo esaminato gli aspetti fondamentali, ma ne restano ancora altri da discutere, ed è meglio riuscire a farlo già nella classe quarta.

- *Teorema del confronto.*
  C'è da studiare il caso in cui il limite *non esiste*, come avviene ad esempio per le funzioni seno e coseno all'infinito. Tuttavia ciò non accade per ogni limite in cui intervengono le funzioni trigonome-

triche e per comprenderlo è utile considerare alcuni semplici casi come $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$, *esplorare* il comportamento della funzione all'infinito e *congetturare* il valore del limite; per *dimostrarne* la correttezza si potrà infine discutere il teorema del confronto (dispensa *Teorema del confronto* e file *Confronto.ggb*).
Con il foglio di attività *25* e il file *MotoSmorzato.ggb* si possono poi consolidare gli aspetti di calcolo, analizzare semplici modelli di fenomeni periodici e applicare i nuovi strumenti allo studio del *grafico* di funzioni trigonometriche, completando così il lavoro svolto nel segmento precedente del percorso relativamente alle funzioni razionali, irrazionali, esponenziali e logaritmiche.

- *Forma indeterminata* "$\frac{0}{0}$" *e teorema di de l'Hôpital.*
  Il teorema può sembrare magico agli studenti – perché mai il limite del rapporto tra due funzioni dovrebbe essere uguale a quello tra le loro derivate? –, e per questo è opportuno discuterne insieme una *giustificazione*: l'idea è di approssimare i valori delle funzioni a numeratore e a denominatore con quelli che si ottengono muovendosi lungo le tangenti ai loro grafici nel punto in cui si calcola il limite; ora, entrambe le funzioni si annullano in tale punto, perciò localmente il rapporto tra i valori delle due funzioni si approssima con il rapporto tra i valori delle loro derivate. Naturalmente questa non è una dimostrazione, ma è comunque formativa poiché mette in gioco l'interpretazione geometrica della derivata.
  La regola di de l'Hôpital si può applicare inoltre alla forma "$\frac{\infty}{\infty}$", e ciò permette di *dimostrare* i risultati sugli ordini di infinito, introdotti in una delle attività precedenti e già impiegati in diversi esercizi. Tuttavia è bene andare oltre il calcolo e discutere anche aspetti un po' più speculativi, ad esempio se il teorema si può *invertire* oppure quando è *conveniente* utilizzarlo e quando non lo è; se ne parla nei fogli di attività *26* e *27*, che sono però rivolti perlopiù al riepilogo sui limiti e sulla costruzione dei grafici di funzioni.

- *E i limiti notevoli?*
  Diciamo subito che non ci sembrano utili gli esercizi che richiedono manipolazioni algebriche piuttosto sofisticate per esprimere un dato limite in termini di limiti noti, raccolti spesso in elenchi nei manuali e indicati appunto come *limiti notevoli*. O meglio, non ci sembrano formativi per gli studenti della scuola secondaria, visto che ci sono contesti ben più significativi nei quali sviluppare abilità di calcolo.
  Invece val la pena esaminare il ruolo dei due limiti che sono citati nel quadro di riferimento per la seconda prova dell'Esame di stato per i licei scientifici [MIUR, 2018], ovvero: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ e $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$. Il primo ha una dimostrazione significativa che utilizza il teorema del con-

fronto, mentre il secondo è la nostra definizione del numero e come base naturale o, più precisamente, è la sua traduzione nel linguaggio simbolico, come è chiarito nella sezione 1.2.5.
Il fatto poi che il valore di ciascuno dei due limiti sia 1 permette di affermare che la derivata di $\sin x$ in $x_0 = 0$ è uguale a $\cos 0$ e che la derivata di e^x in $x_0 = 0$ è uguale ad e^0. Anzi, tali uguaglianze si possono estendere ad ogni numero reale, ossia la derivata della funzione $\sin x$ è $\cos x$ e la derivata della funzione e^x è e^x per ogni x reale, e questo grazie rispettivamente alla formula di addizione del seno e alla proprietà caratterizzante della funzione esponenziale; si può approfittare dell'occasione per dimostrare la prima, mentre l'altra dovrebbe essere già stata esaminata nella classe terza.

- *Limiti di funzioni del tipo* $f(x)^{g(x)}$.
  È il caso che manca per completare il quadro. Si può partire da una questione come quella che segue e che ha senso proporre addirittura all'inizio del percorso sui limiti, anche se si svilupperanno solo in seguito gli strumenti per affrontarla rigorosamente:

  Il valore del limite $\lim_{x \to 0} x^x$ *è* 0 *oppure* 1*? Ossia influisce di più l'apporto della base oppure quello dell'esponente?*

  La risposta non è scontata per gli studenti e si può ottenere riscrivendo la funzione come $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$. Mediante lo stesso approccio si investigheranno poi altri esempi di limiti dello stesso tipo, ricavando volta per volta il loro valore, e si incontreranno altre forme indeterminate esponenziali.

Un'ultima osservazione prima di concludere: in questa sezione ci siamo occupati soprattutto dei concetti e dei principali aspetti di calcolo, ma è importante esaminare anche alcuni *processi* di *approssimazione*. Tra gli esempi che si possono considerare, uno dei più interessanti è ottenere l'area del cerchio come limite delle aree dei poligoni regolari inscritti, utilizzando la trigonometria; se ne parla, ad esempio, in [Adams, 2004, pag. 59, 60].

Un esempio di seconda prova sui limiti è verifica *6*. Per il lavoro estivo proponiamo invece la lettura *Letture classe quarta* e il foglio di attività *28*, che riguarda le questioni nodali affrontate nel corso dell'anno scolastico e di cui è bene disporre a lungo; e con questo ci sembra di aver completato l'esame di quanto è significativo affrontare nel secondo biennio.

2.3 Un percorso in sintesi

A conclusione del capitolo ci sembra utile sintetizzare alcuni aspetti operativi del percorso che abbiamo proposto per la classe quarta, e lo facciamo mediante una tabella che riporta contenuti e modalità nonché i tempi indicativi per affrontarli.

È uno schema analogo a quello mostrato nel paragrafo 1.3 di questo volume per la classe terza e a quello realizzato per le classi del primo biennio e pubblicato in [Cappello e Innocenti, 2022, sez. 2.4]; anch'esso si basa su una accurata pianificazione delle attività, sulla loro sperimentazione in varie scuole e sulla revisione che ne è seguita.

CONTENUTI e MODALITÀ	***TEMPI*** *(unità orarie)*
1. Funzioni trigonometriche	
Definizione di seno, coseno, tangente di un numero reale. Funzioni trigonometriche e loro grafici; simmetrie del grafico e funzioni pari, dispari. *Modelli periodici e funzioni della forma Asin(ωx): interpretazione geometrica dei parametri, ampiezza e periodo. Approfondimento: interpretazione dei parametri nel caso di un'onda acustica.* *Semplici equazioni e disequazioni goniometriche: interpretazione mediante le funzioni e i grafici, determinazione degli zeri sfruttando le simmetrie del grafico; funzioni inverse delle funzioni trigonometriche.* *Formule di addizione del seno e del coseno; formule di duplicazione.*	*16*
Derivata delle funzioni seno e coseno: congettura della formula, derivata della funzione Asin (ωx) e analisi del moto armonico.	*3*
2. Calcolo delle probabilità: sviluppi	
Richiami sul contare gli elementi di un insieme. Formalizziamo: esempi di disposizioni, permutazioni e combinazioni; coefficienti binomiali. *Probabilità di eventi che dipendono da altri: probabilità condizionata, un rapporto tra probabilità; dalla probabilità degli "effetti" a quella delle "cause" mediante tabelle e grafi ad albero, analisi di situazioni significative come test clinici e falsi positivi, esame dei risultati.* *Interpretazione geometrica della probabilità mediante la misura di insiemi.*	*8*

Uno schema di base: le prove ripetute, modellizzazione in vari ambiti (overbooking, sondaggi…). Calcolo della probabilità di ottenere un dato numero di successi. Approfondimenti: rappresentazione dei valori di probabilità mediante tabelle e grafici; esperimenti e simulazioni; valor medio probabilistico e suo significato statistico.	*10*
3. Derivata di funzioni composte	
Composizione di funzioni. Formula della derivata di funzioni composte. Applicazione alle questioni già esaminate con le funzioni base: equazione della retta tangente, punti stazionari, problemi di ottimizzazione, analisi dell'andamento di alcune funzioni che modellizzano situazioni fisiche o di altro tipo.	*15*
4. Successioni aritmetica e geometrica	
Invarianti della successione (differenza o rapporto tra termini consecutivi), interpretazione come "regola di spostamento", scrittura per ricorsione, espressione del termine generale. Somma di un numero finito di termini della successione. Serie geometrica: somme infinite, allineamenti decimali periodici, modellizzazione in geometria ed economia (piani di accumulo, mutui…); cenno ai paradossi di Zenone. Cenni ad altre successioni, ad esempio alla serie armonica.	*8*
5. Approfondimento: misurare l'infinito	
Misurare l'infinito: dai paradossi alla definizione di Dedekind di insieme infinito; confronto con $\mathbb{N}$ degli insiemi numerici $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, cenni alla non numerabilità di $\mathbb{R}$. Una rappresentazione espressiva: l'albergo di Hilbert. Corrispondenze biunivoche, funzioni iniettive, suriettive. Approfondimenti sulla dimostrazione e costruzione di semplici dimostrazioni.	*10*
6. Limiti e grafici di una funzione	
Determinazione dell'insieme di definizione di una funzione, anche quando la funzione modellizza una situazione, come nei problemi di ottimizzazione.	*5*

Approccio informale alla nozione di limite: esame del comportamento di una funzione all'infinito e nell'intorno di un punto mediante tabelle di valori della funzione e analisi del grafico; asintoti orizzontali e verticali. Aspetti quantitativi: stime dei valori della funzione su intervalli. Limiti delle funzioni base agli estremi dell'insieme di definizione. *Interpretazione della definizione rigorosa di limite: dalla formalizzazione nel registro simbolico alla descrizione nel linguaggio naturale e alla scrittura mediante la notazione specifica dei limiti. Definizione di limite finito e infinito all'infinito.* *Calcolo di limiti: i casi "$\frac{k}{\infty}$" e "$\frac{k}{0}$"; limiti all'infinito di funzioni razionali e irrazionali, confronto tra ordini di infinito per le funzioni base. Esempi significativi: crescita logistica, andamento di una forza che dipende dall'inverso del quadrato della distanza…* *Costruzione del grafico qualitativo di semplici funzioni mediante gli strumenti limite e derivata. Esame di alcune funzioni che modellizzano situazioni fisiche.*	*25*
Ulteriori strumenti: comportamento all'infinito delle funzioni trigonometriche e teorema del confronto; caso "$\frac{0}{0}$" e regola di de l'Hôpital, applicazione ad altre forme indeterminate; limiti notevoli $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ e interpretazione come pendenza, dimostrazione della derivata di $\sin x$ e richiami alla dimostrazione della derivata di e^x. *Cenni ai limiti di funzioni della forma $f(x)^{g(x)}$.* *Limite nei processi di approssimazione: area del cerchio come limite delle aree dei poligoni inscritti.*	*20*

Bibliografia e sitografia del capitolo 2

[Accascina et al., 2006] Accascina, G., Anichini, G., Anzellotti, G., Rosso, F., Villani, V., Zan, R. (2006). *La matematica per le altre discipline*. Edizioni dell'Unione Matematica Italiana.
https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2013/10/MATTONCINIcrop-finale.pdf

[Adams, 2004] Adams, A. (2004). *Calcolo differenziale 1.* Milano: Casa editrice Ambrosiana. Prima edizione: 1992.

[Antonini, 2016] Antonini, S. (2016). Congetturare e argomentare tra esempi e controesempi. Intervento nell'ambito del convegno: *Educare alla razionalità. Tra Logica e Didattica della Matematica.* Sestri Levante, giugno 2016.
http://www.ailalogica.it/eventi/gentilini/antonini.pdf

[Baldi, 2012] Baldi, P. (2012). *Introduzione alla probabilità con elementi di statistica.* Milano: Mc Graw-Hill. Prima edizione: 2003.

[Baldo, 2015] Baldo, S. (2015). *Materiale per il Laboratorio di Scienza del Suono.*
http://profs.scienze.univr.it/~baldo/divulgazione/matfismus.html
[Bartocci, 2006] Bartocci, C. (2006). *Racconti matematici.* Torino: Einaudi.
[Bernardi, 2019] Bernardi, C. (2019). Esplorare e dimostrare. Esempi e riflessioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 42A-B (5), 582-595.
[Bottazzini, 1981] Bottazzini, U. (1981). *Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass.* Torino: Bollati Boringhieri.
[Bruner, 1970] Bruner, J.S. (1970). *La sfida pedagogica americana.* Roma: Armando.
[Bruner, 2001] Bruner, J.S. (2000). *La cultura dell'educazione.* Milano: Feltrinelli.
[Cappello e Innocenti, 2022] Cappello, L., Innocenti, S. (2022). *Facciamo la matematica che conta. Il curricolo di matematica per il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado: dalle scelte didattiche alla declinazione in classe.* Trento: Iprase.
https://www.iprase.tn.it/pubblicazioni-dettaglio/-/asset_publisher/7sljBGdygB6h/content/facciamo-la-matematica-che-conta-il-curricolo-di-matematica-per-il-primo-biennio-della-scuola-secondaria-di-secondo-grado-dalle-scelte-didattiche-alla/20178
[Cappello e Mazzini, 2017] Cappello, L., Mazzini, F. (2017). *Mettiamo in gioco la probabilità: percorsi per il primo biennio e oltre.*
https://edulab.unitn.it/dicomat/probabilita/mettiamo-in-gioco-la-probabilita/
[Castelnuovo, 1993] Castelnuovo E. (1993). *Pentole, ombre, formiche*. Firenze: La Nuova Italia.
Nel 2017 è uscita una nuova edizione del testo, realizzata da UTET e curata dall'UMI e dalla CIIM.
[EUR, 2006] Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio, 18 dicembre 2006 relativa a competenze chiave per l'apprendimento permanente (2006/962/CE).
http://eurlex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/HTML/?uri=CELEX:32006H0962&from=IT
[Dalvit, 2022] Dalvit, E. (2022). *Alcuni materiali per la divulgazione e la didattica.*
https://sites.google.com/scuole.provincia.tn.it/esterdalvit/laboratori
[Danzi e Scapin, 2017] Danzi, K., Scapin, E. (2017). *Il modello delle prove ripetute.*
https://edulab.unitn.it/dicomat/probabilita/modello-delle-prove-ripetute/
[de Finetti, 1959] de Finetti, B. (1959). *Matematica logico intuitiva*. Napoli: Cremonese.
[Giusti, 1989] Giusti, E. (1989). *Analisi matematica 1.* Torino: Bollati Boringhieri.
[Dall'Aglio,] Dall'Aglio, G. (2003). *Calcolo delle probabilità.* Bologna: Zanichelli.
Prima edizione: 1987.
[Fischbein, 1989] Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the Learning of Mathematics*. 9 (3), 9-14.
(trad. it. Modelli taciti e ragionamento matematico. In Fischbein, E., Vergnaud, G. (1992). *Matematica a scuola: teoria ed esperienze*. 25-38. Bologna: Pitagora Editrice).
[Freudenthal, 1994] Freudenthal, H. (1994). *Ripensando l'educazione matematica.* Brescia: La Scuola.

[Klein, 1999a] Klein, M. (1999). *Storia del pensiero matematico. II. Dal settecento ad oggi.* Torino: Einaudi.
Titolo originale: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, 1972.
[Lakatos, 1979] Lakatos, I. (1979). *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica.* Milano: Feltrinelli. Edizione originale: 1976.
[Lombardo Radice, 2014] Lombardo Radice, L. (2014). *L'infinito.* Roma: Editori Riuniti. Prima edizione: 1981.
[MIUR, 2010] MIUR (2010). *Indicazioni nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento per i licei.*
https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf
[MIUR, 2012] MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione.*
https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf
[MIUR, 2018] MIUR (2018). *Quadro di riferimento per la redazione e lo svolgimento della seconda prova scritta dell'Esame di stato, per i Licei* (DM 769/2018).
https://www.istruzioneer.gov.it/2022/03/30/esami-di-stato-quadri-di-riferimento-e-griglie-di-valutazione-dm-789-2018/
[MIUR, 2018a] MIUR (2018). *Testo della seconda prova scritta dell'Esame di stato per il Liceo scientifico.*
https://www.istruzione.it/esame_di_stato/201718/Licei/Ordinaria/I043_ORD18.pdf
[MPI, 1944]. *Programmi dei Governi Alleati (Sottocommissione Alleata per la scuola) per la Scuola Media, i Licei e gli Istituti magistrali. Programma di matematica per il Liceo scientifico.*
https://www1.mat.uniroma1.it/ricerca/gruppi/education/programmiLS.htm#scientifico44
[MPI, 1996] *Circolare Ministeriale* del 27 settembre 1996, n. 615. *Piano Nazionale per l'introduzione dell'informatica nelle scuole secondarie superiori. Indicazioni programmatiche relative all'insegnamento della matematica nel triennio del liceo ginnasio e del liceo scientifico e nel secondo biennio dell'istituto magistrale.*
https://www.edscuola.it/archivio/norme/circolari/cm615_96.html
[Orientamat, 2006] Sito del *Progetto Orientamat.*
http://www.science.unitn.it/orientamat/
[Osenda, 2009] Osenda, D. (2009). *Ultima lezione a Gottinga.* Torino: 001 edizioni.
https://andreaplazzi.files.wordpress.com/2008/09/gottinga-davideosenda-common.pdf
[Paola et al., 2017] Paola, D., Impedovo, M., Castagnola, E. (2017). *Matematica dappertutto. Volume C.* Bologna: Zanichelli.
[Villani, 2003a] Villani, V. (2003). Ripensando la matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 26A-B (3), 255-269.
[Villani, 2007] Villani, V. (2007). *Matematica per discipline bio-mediche.* Milano: Mc Graw-Hill. Prima edizione: 1991.
[Villani et al., 2012] Villani, V., Bernardi, C., Zoccante, S., Porcaro, R. (2012). *Non solo calcoli.* Milano: Springer-Verlag Italia.

3. Alcuni materiali didattici

3.1 Le verifiche sommative

Più di tante parole, i testi delle verifiche sommative mostrano quali sono gli aspetti che il docente reputa davvero importanti e, in particolare, i contenuti e le abilità che ritiene più rilevanti tra quelli sviluppati nel segmento di percorso in esame. Naturalmente in classe si fa di più di quanto si richiede poi nelle prove e non tutto si può verificare, eppure esse costituiscono una rappresentazione efficace del percorso che si pensa di aver realizzato con gli studenti.

Questa è la principale ragione per cui nel paragrafo mostreremo le verifiche assegnate ad una nostra classe nell'arco del secondo biennio, in modo da fornire uno sguardo *immediato* sulle scelte didattiche compiute e dare un'immagine più *concreta* della nostra proposta illustrata nei due capitoli precedenti.

I testi delle verifiche sono sostanzialmente quelli originali, con qualche eccezione:

- verifica *3* classe terza, esercizio 2: è stata indicata l'espressione della funzione polinomiale di secondo grado che nella versione originale si doveva ricavare a partire da condizioni assegnate; infatti la verifica è già molto ricca, dunque richiedere anche la costruzione dell'equazione, peraltro già discussa al secondo anno, non ci sembra rilevante
- verifica *5* classe terza, esercizio 6: è stata eliminata la richiesta di studiare il grafico qualitativo di una funzione della famiglia, per alleggerire il quesito e poiché la questione si approfondirà più avanti, nella classe quarta
- verifica *3* classe quarta, esercizio 6: la domanda è stata semplificata poiché conteneva più richieste dello stesso tipo
- verifica *5* e verifica *6* classe quarta: le due verifiche originali sono state assegnate a distanza durante la pandemia di Covid-19, in una

versione breve; le nuove versioni qui proposte contengono quindi alcuni esercizi in più che le completano.

Come organizzare una buona valutazione *sommativa*? È una questione complessa, che esula dagli obiettivi del volume; tuttavia non vogliamo eludere completamente la domanda e qualche considerazione intendiamo farla.

Diciamo subito che è povera – e fornisce un'idea distorta della matematica che si può fare a scuola – una verifica sommativa che, ad esempio, preveda solo di risolvere equazioni e disequazioni esponenziali, magari minuziosamente suddivise in più tipologie. La prova dovrebbe vertere infatti su diversi contenuti *nodali* e, soprattutto, dovrebbe permettere allo studente di mettere in atto più *abilità* significative. Naturalmente ci sono situazioni contingenti – urgenza di disporre di valutazioni, necessità di dare rilevanza ad aspetti specifici, ad esempio ad abilità di calcolo – in cui ciò non è possibile, ma nell'arco dell'anno scolastico è bene prevedere varie prove sommative *complete*, nel senso appena indicato.

Il nostro è un proposito impegnativo e per realizzarlo occorre dedicare molto tempo alla *progettazione*: ispirarsi magari a quesiti proposti da altri ma poi scrivere il *proprio* testo, modulandolo sui propri studenti e sul proprio percorso, in modo che la prova abbia un senso pieno per loro e si fondi sugli aspetti a cui è stata data effettiva rilevanza in classe. Del resto, è un tempo ben investito, poiché permette al docente di *arricchire*, non poco, le proprie competenze disciplinari e didattiche.

Dunque varietà di contenuti e abilità. Ma c'è un'altra attenzione che riteniamo fondamentale: fare in modo che ogni quesito risponda ad uno o più *obiettivi* ben precisi e diversi tra loro, almeno di norma. Perché richiedere più volte le stesse cose, magari al medesimo livello di difficoltà e con sfumature insignificanti tra una domanda e l'altra?

Per chiarire di quali obiettivi stiamo parlando, consideriamo, ad esempio, la quinta verifica sommativa assegnata nella classe terza e riportata nelle pagine successive; per ogni quesito essi si possono sintetizzare rispettivamente in questo modo:

1. *stimare* valori della funzione esponenziale e utilizzare la calcolatrice per controllare quanto ottenuto
2. costruire ed analizzare *modelli* esponenziali elementari, utilizzare il *linguaggio* naturale per caratterizzare una crescita, *argomentare*
3. risolvere disequazioni esponenziali e logaritmiche, *interpretandole,* quando è opportuno, mediante le funzioni e i grafici
4. tracciare il *grafico* di funzioni esponenziali mediante trasformazioni

geometriche e descrivere il procedimento seguito con i termini specifici

5. utilizzare la derivata per determinare l'equazione della retta tangente; *interpretare* il testo, passare da una forma di rappresentazione all'altra (simbolica e grafica)
6. ricavare *informazioni* su un modello esponenziale mediante la derivata; leggere un'espressione distinguendo i ruoli delle lettere (variabile e parametro)
7. utilizzare ciò che si sa per affrontare *situazioni nuove*, manipolando una formula in vista di un obiettivo (indicare come varia una grandezza noto l'aumento percentuale di un'altra)
8. utilizzare ciò che si sa per affrontare situazioni nuove, passando da una forma di rappresentazione all'altra e costruendo *esempi*.

Quelli indicati sono gli obiettivi *specifici* di ciascun quesito, ma in tutta la prova è richiesto di curare la *comunicazione* e la giustificazione del procedimento o delle affermazioni.

Tuttavia, non crediamo che si possa stabilire con certezza quali abilità/competenze eserciti o meno lo studente nel rispondere: infatti alcuni quesiti sono articolati e prevedono più approcci, le abilità coinvolte spesso si intrecciano e comunque non sempre si possono dedurre dagli elaborati dei ragazzi.

Insomma, interpretare le risposte fornite è delicato, anche se si conosce la classe; per questo può essere opportuno approfondire direttamente con i ragazzi le ragioni sottese, magari attraverso domande mirate.

Fatte queste considerazioni sulla *struttura* della prova, osserviamo che gli obiettivi vanno *condivisi* con gli studenti sia prima sia dopo la verifica; vanno precisati già durante le attività in classe, esplicitandoli volta per volta nella situazione che si sta esaminando e illustrandoli anche attraverso un esempio di prova, ossia una verifica assegnata in un anno precedente o in un'altra classe, che serve per l'autovalutazione e per mostrare *concretamente* cosa può essere richiesto.

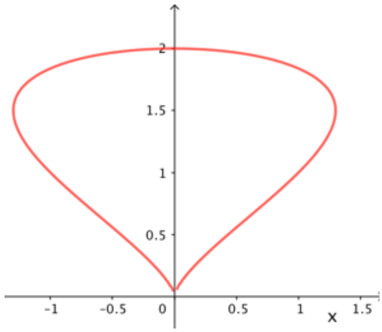
Naturalmente, va chiarito agli studenti che loro dovranno sapere di più di quanto compare nella prova fornita come esempio, perché questa è appunto un esempio, un modello, e che non si devono aspettare che poi sia riprodotta in ogni dettaglio nel tema in classe. Ha piuttosto un ruolo analogo a quello di una lezione di guida: con l'istruttore a fianco, si percorre un certo numero di strade della città, si fa esperienza e si costruisce così un bagaglio di situazioni note, ma poi all'esame (e ancor di più in seguito!) si dovrà mostrare di saper guidare su una qualsiasi strada della città, anche se mai percorsa prima. Anzi, gradualmente dovrebbero essere gli *studenti* stessi ad individuare gli obiettivi dal testo della prova e a chiarirli tra loro e con il docente.

Per quanto riguarda gli aspetti più operativi, rimandiamo invece a quanto è stato già precisato in [Cappello e Innocenti, 2022, sez. 3.1]:

> *[…] il tempo previsto per svolgere ogni prova è di 90 minuti, in modo che gli studenti abbiano la tranquillità necessaria per riflettere sul significato delle richieste, curare l'esposizione, realizzare rappresentazioni grafiche, giustificare con chiarezza i passi compiuti e per controllare i calcoli svolti. Inoltre è consentito l'uso della calcolatrice scientifica, ad eccezione di alcuni esercizi indicati.*
> *Una precisazione: il simbolo * che compare nel testo segnala un quesito di una tipologia che non è stata discussa in classe, ma al quale i ragazzi possono provare a rispondere utilizzando quanto conoscono.*
>
> *Dopo la verifica gli studenti riesaminano a fondo i quesiti, ne discutono insieme, riscrivono la risoluzione di alcuni di essi curando la formalizzazione, e si confrontano con lo svolgimento scritto che viene loro proposto dal docente. È anche questo un modo per studiare ed imparare. Ma non basta: dovrebbero riprendere gli esercizi anche in seguito e in più occasioni [...]. E, con l'aiuto del docente, dovrebbero riflettere sui propri punti forti e di debolezza, sull'organizzazione dello studio, a partire dalla gestione degli appunti. Così la verifica diventa un'occasione per ripensare complessivamente il proprio apprendimento ed eventualmente reindirizzarlo; non ci si può accontentare di correggere i singoli errori commessi e di prendere atto delle risposte esatte fornite*.

Verifica di matematica

1. La curva ϕ in figura, detta *quartica piriforme*, ha equazione
$$y^3(y-2)+x^2=0.$$
   - La curva ϕ ha simmetrie? Giustifica
   - La corda orizzontale di lunghezza massima passa per $\left(0,\frac{3}{2}\right)$. Quanto è lunga?
   - Mostra che a ϕ non appartengono punti di ordinata maggiore di 2.



2. Disegna la circonferenza Γ di equazione $(x+1)^2+(y-3)^2=5$.
   - Considera la retta che passa per il punto $P(0,1)$ di Γ e ha pendenza −3; essa incontra Γ anche nel punto Q. Determina le coordinate di Q
   - Il segmento PQ è un diametro di Γ? Giustifica
   - Sia AB la corda individuata su Γ dalla retta $x=\frac{1}{2}$ e sia C il centro della circonferenza. Calcola l'area del triangolo CAB, senza determinare le coordinate di A e B.

3. Determina l'equazione della circonferenza che ha il centro sulla retta $y=-\frac{x}{4}$, sapendo che ha come tangente la retta di equazione $y=-2x+1$ nel punto $A(1,-1)$.
   Indica, nell'ordine, quali strumenti di GeoGebra utilizzi per risolvere il problema.

4. Trova per quali a, b, c la circonferenza di equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ è circoscritta al triangolo di vertici $P(2,1)$, $Q(-1,-3)$, $R(3,-1)$.
   Poi completa i quadrati e riscrivi l'equazione nella forma $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.
   Infine spiega come si può determinare il centro della circonferenza per via sintetica.

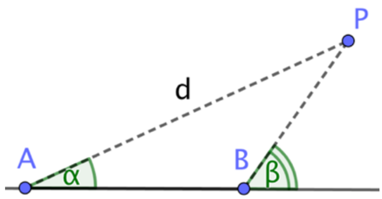
5. Considera l'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leq x^2+y^2\leq 3,\ y\geq 0\}$. Determina la sua area.

6.* È data un'equazione della forma $x^2-ax+3=0$; supponiamo che abbia due soluzioni positive diverse x_1, x_2. Si vogliono *costruire due segmenti di lunghezze* x_1 *e* x_2.
   Per farlo, si può considerare la circonferenza che ha un diametro di estremi $B(0,1)$ e $D(a,3)$.
   Poi si determinano i punti G, F in cui essa interseca l'asse x: OG e OF sono i segmenti cercati (O è l'origine).
   - Per $a=4$ mostra che la costruzione è corretta, ossia che le ascisse di G e di F sono effettivamente le soluzioni dell'equazione, cioè $x_1=1$ e $x_2=3$
   - Mostra poi in generale che la costruzione è corretta.

Verifica di matematica

1. a) Indica gli strumenti GeoGebra che utilizzi per costruire l'ellisse mediante una circonferenza, dati i fuochi e la somma delle distanze da essi.
   Dimostra che il generico punto così ottenuto appartiene effettivamente all'ellisse.
   b) Nella St. Paul's Cathedral di Londra si trova una galleria che ha soffitto elissoidale ed è chiamata "camera dei sussurri". Prova a spiegare per quale ragione.

2. Una fotografa[1], posta nel punto A individua un uccello raro appollaiato sulla cima di un albero in P. L'angolo di elevazione è α e la distanza dall'uccello è d. La fotografa avanza lentamente, fino ad arrivare nel punto B in cui l'angolo di elevazione è β.
   - Esprimi la distanza BP in funzione di α, β, d.
   - Spiega, per via *sintetica*, perché i dati α, β, d sono sufficienti per determinare BP.



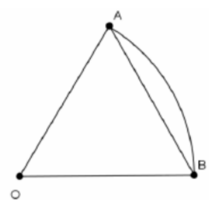
3. In un quadrilatero $ABCD$ si ha $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{CD} = 5$, $\overline{DA} = 2$; inoltre $\hat{A} = 28°$. Determina l'ampiezza di $\hat{C}$.

4. Un aereo vola per 100 *km* lungo il parallelo di latitudine 80° *N*; determina l'ampiezza dell'angolo di longitudine che così percorre.
   Assumi che il raggio della Terra misuri 6370 *km*.

5. Traccia il grafico della funzione $f(x) = 3 - \sqrt{5 - x^2}$ e risolvi la disequazione $f(x) > 2x$.

6. Su Wikipedia leggi che l'orbita di Marte ha eccentricità 0,0934 e che l'afelio (punto di massima distanza dal Sole) dista circa 249 milioni di *km* dal Sole. Ricava la semidistanza tra i fuochi dell'orbita.
   Invece sul sito non trovi la lunghezza del semiasse minore; puoi ricavarla da tali dati?

7.* È dato[2] il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x in *radianti*.
   Si provi che l'area del sottoinsieme del piano delimitato dall'arco e dalla corda AB è espressa da $\frac{1}{2}r^2(x - \sin x)$.



8.* Un'ellisse ha fuochi $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e la somma delle distanze da essi è uguale a 2. Ricava la sua equazione utilizzando la caratterizzazione dell'ellisse come luogo geometrico.

---

[1] Dall'Esame di stato 2011.
[2] Dall'Esame di stato 2009.

Verifica di matematica

1. a) Apollonio definisce la retta tangente ad una parabola come *la retta che ha un solo punto in comune con la curva* e aggiunge la condizione che la tangente *lasci la curva tutta da una parte*.
   Prova a spiegare perché ha aggiunto tale condizione. Inoltre disegna una curva e una retta che sia tangente ad essa per noi oggi, ma che non lo sia secondo la definizione di Apollonio.
   b) Considera la funzione $f(x) = 2 + x^3$; calcola $f'(1)$, mediante la definizione.
   c) Sia $C(p)$ il costo di produzione di un bene; si sa che il costo marginale è $C'(3) = 2$. Quanto vale, *circa*, $C(3.1) - C(3)$?

2. Traccia il grafico della funzione $f(x) = -x^2 - 2x + 2$ e disegna la retta tangente e la retta normale in $x_0 = 0$; determina l'equazione della normale.
   Senza svolgere ulteriori calcoli, determina la pendenza del grafico di f in $x_1 = -2$; giustifica.

3. Assumi che un corpo si muova al tempo $t > 0$ con legge oraria $s(t) = 2\sqrt{t} - t$; le unità di misura dello spazio e del tempo sono quelle del S.I.
   Determina per quale t la velocità istantanea è uguale alla velocità media tra $t_1 = 1\,s$ e $t_2 = 4\,s$.

4. Traccia il grafico della funzione $f(x) = \frac{2}{x}$ e la retta che passa per $P(6,-1)$ ed è tangente al grafico in un punto del primo quadrante. Determina l'equazione di tale retta.

5. Considera la funzione $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$.
   – Calcola gli zeri e i punti stazionari e traccia il grafico di f
   – Per quali c l'equazione $f(x) = c$ ha 3 soluzioni?

6.* È data la funzione $f(x) = x^2$ e siano $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ due punti del suo grafico. Considera la seguente proprietà di f:

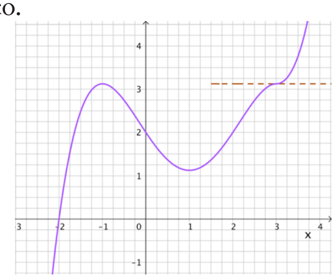
   sia c l'ascissa del punto in cui la retta tangente al grafico di f
   è parallela ad AB; allora c è la media aritmetica di a e b.

   – Rappresenta graficamente la situazione e interpreta geometricamente la proprietà indicata
   – Mostra che la proprietà è vera per due punti A e B a tua scelta
   – Mostra che la proprietà è vera in generale per ogni coppia di punti A e B.

Verifica di matematica

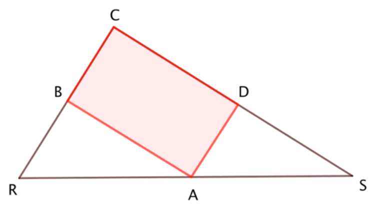
1. Data una semisfera di raggio 1 considera i cilindri inscritti nella semisfera (ossia i cilindri che hanno una base sul piano equatoriale e l'altra che tocca la superficie sferica).
Determina la misura dell'altezza del cilindro inscritto che ha volume massimo.
Senza la calcolatrice, mostra che il volume massimo è maggiore della metà del volume della semisfera[3].

2. Considera la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x^2-2x}{2x^2+1}$.
   - Determina i punti stazionari; precisa se sono punti di massimo o punti di minimo
   - Individua gli zeri e il valore della funzione nei punti stazionari
   - Esamina l'andamento di f all'infinito e traccia il suo grafico.



3. In figura è rappresentato il grafico di una funzione f; la retta $y = \frac{25}{8}$ è tangente al grafico.
Traccia il grafico qualitativo della funzione derivata f'.
*Supponi invece che il grafico in figura rappresenti f'; traccia un possibile grafico di f nell'intervallo $\left[-\frac{17}{8}, -1\right]$.

4. Determina per quale valore del parametro c il grafico della funzione $f(x) = cx^2 + 1$ è tangente al grafico della funzione $g(x) = 4\sqrt{x}$.



5. Nel rettangolo $ABCD$ in figura si ha $\overline{BC} = 2$ e $\overline{CD} = 3$.
Considera i triangoli rettangoli RCS (A appartiene a RS) e sia $x = \overline{DS}$.
Determina per quale valore di x l'area di RCS è minima.

6.* La retta tangente al grafico di una funzione f nel punto $x_0 = 0$ ha equazione $y = 3x - 2$.
Considera la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$; calcola $g'(0)$.

---

[3] Dall'Esame di stato 2017.

Verifica di matematica

1. Considera la funzione 2^n. Qual è *il più piccolo* $n \in \mathbb{N}$ tale che 2^n in *cm* sia maggiore della nostra distanza dalla stella Proxima Centauri? Assumi che la distanza sia 4 anni luce (1 anno luce è pari a $9{,}461 \cdot 10^{12}$ *km*).
Individua, mediante maggiorazioni, il numero naturale che verifica la disuguaglianza richiesta. Poi controlla, mediante la calcolatrice, che tale valore sia il più piccolo.

2. La differenza di temperatura tra un corpo e l'ambiente si riduce del 14% ogni $10\ s$.
   - Se invece la decrescita fosse lineare, come andrebbe modificata la frase "si riduce del 14% ogni $10\ s$"?
   - Hai a disposizione i dati raccolti, ossia le differenze di temperatura ogni $10\ s$. Come giustifichi che la decrescita è esponenziale, senza ricavare l'espressione analitica del modello?
   - In quanti secondi la differenza di temperatura si riduce dell'80%?
   - Quanto vale il tasso di decrescita in $1\ s$? Ricorda che stiamo assumendo che il tasso di decrescita sia costante su intervalli di tempo di ampiezza uguale.

3. Risolvi le seguenti disequazioni, utilizzando anche i grafici delle funzioni elementari.
$$\left(3\sqrt[3]{9} - 3^x\right)\left(6 + 3^{-x}\right) > 0 \qquad\qquad \frac{3}{\log_2 x} \leq -2$$

4. Traccia il grafico della funzione $f(x) = |3^{x-1} - 3|$ a partire dal grafico di 3^x e indica quali trasformazioni geometriche consideri.
Per quali x vale $f(x) < 2(x-2)^2$?

5. Considera la funzione $f(x) = e^x - 2$.
   - Scrivi l'equazione della retta t tangente al grafico di f nel suo punto A di ascissa a. Esprimi in funzione di a l'ascissa b del punto B in cui t interseca l'asse x
   - Sia $\bar{x}$ lo zero di f. Per $a = 1$ calcola la differenza $b - \bar{x}$ e verifica che è minore di $5 \cdot 10^{-2}$.

6. La funzione $f(x) = \frac{ce^x}{c-1+e^x}$, dove c è un parametro positivo e diverso da 1, rappresenta la quantità di individui di una popolazione al tempo $x \geq 0$, in opportune unità di misura (modello di Verhulst, 1838). L'andamento della popolazione ha punti stazionari? Per quali c la popolazione è crescente?

7.* Il livello sonoro P si può esprimere in funzione dell'intensità dell'onda acustica I nel modo seguente:

$$P = 120 + 10\log_{10} I \text{ (in opportune unità di misura).}$$

Se I aumenta del 70%, allora come varia P? Precisa.

8.* Scrivi l'espressione di una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, f' sia positiva e (strettamente) decrescente.

Verifica di matematica

1. Spiega perché i muratori per verificare che il pavimento sia orizzontale dispongono la livella in due direzioni diverse sul pavimento.

2. Siano a, b numeri positivi e diversi da 1. Dimostra l'uguaglianza
$$\frac{1}{\log_b a} + 2 = \log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a^2 b}\right).$$

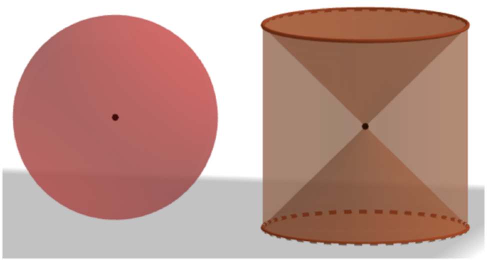
3. Risolvi le seguenti disequazioni.
$$3^{x+1} + 2 \cdot 3^{-x} - 7 < 0 \qquad\qquad \log_2(1-x) \leq -1$$

4. – Mostra che la funzione $2 + \log_3|x|$ non è invertibile sull'insieme $\mathbb{R} - \{0\}$
   – Considera la funzione $f(x) = 2 + \log_3(-x)$. Traccia il grafico di f e della sua funzione inversa g
   – Scrivi l'espressione di g e mostra che per ogni $x < 0$ vale $g(f(x)) = x$.

5. a) Spiega in dettaglio come si può ricavare la formula dell'area laterale del cono, noti raggio e apotema
   b) Dagli estremi di uno spigolo del cubo conduci le due diagonali del cubo. Mostra che non sono perpendicolari
   Suggerimento: osserva che le diagonali si incontrano in un punto e considera un opportuno triangolo.

6. Considera un cubo di base *PQRS* e spigoli di lunghezza c. Indica con *A* un punto della perpendicolare per *P* alla base *PQRS*. Determina la lunghezza del segmento *PA* in ciascuna delle due situazioni:
   – il volume della piramide *PQRSA* è il 30% del volume del cubo
   – l'area totale della piramide *PQRSA* è $\frac{2}{3}$ dell'area totale del cubo.

7.* Data una sfera di raggio r considera il cilindro circoscritto alla sfera. In esso considera i due coni che hanno come base le basi del cilindro e vertice nel centro del cilindro. Si chiama *anticlessidra* il solido differenza tra il cilindro e i due coni.
   – Dimostra, utilizzando il principio di Cavalieri in modo analogo a quanto visto a lezione, che l'anticlessidra ha volume uguale a quello della sfera data
   – Da ciò deduci la formula del volume della sfera.



Verifica di matematica

1. Traccia il grafico della funzione $f(x) = 1 - 2\cos(-3x)$. Individua il periodo, l'immagine e il più piccolo punto $x_0 > 0$ di massimo. Determina quanti punti di massimo ha f in $[0,7]$ e giustifica la risposta senza la calcolatrice.

2. Trova l'insieme delle soluzioni dell'equazione e della disequazione seguenti, nell'insieme indicato.

$$2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\cos x - 4 = 0 \qquad \text{per } x \in [0,2\pi]$$

$$\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \sqrt{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 0 \qquad \text{per } x \in [0,4]$$

3. Determina i punti stazionari della funzione $f(x) = \cos x - \frac{1}{\cos x}$ in $[0,2\pi]$ e precisa se sono punti di massimo o di minimo.
   Quanto vale la pendenza della retta tangente al grafico di f in $x = \frac{2\pi}{3}$?

4. Considera la funzione $f(x) = \frac{\sin^3 x}{2x} - \cos x$ e determina se è pari oppure se è dispari oppure se è né pari né dispari. Giustifica la risposta.

5. Esprimi $\cos x$ in funzione di solo $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.
   Dimostra la formula di addizione del coseno a partire dalla formula di addizione del seno.

6. La tensione elettrica in un'abitazione al tempo t è data dalla funzione $V(t) = 311\sin(100\pi t)$.
   Supponi che all'istante a sia $V(a) = 0$ e che V sia crescente in un intervallo che contiene a.
   - Determina (in funzione di a) il più piccolo istante $b > a$ tale che $V(b) = 311$
   - Se si toglie l'ipotesi che V sia crescente in un intervallo che contiene a, allora non ci sono informazioni sufficienti per determinare il valore richiesto di b. Perché?
     Tutte le grandezze sono espresse in unità di misura del Sistema Internazionale.

7*. – Spiega in dettaglio perché vale $\arccos(\cos(-1)) = 1$
   – Prova ad esprimere $\tan(2\alpha)$ in funzione di solo $\tan\alpha$.

Verifica di matematica

1. – È vero che $p_B(A) = p_A(B)$ per ogni A, B tali che $p(A) \neq 0$ e $p(B) \neq 0$?
   – Considera uno schema di $n = 10$ prove ripetute. Giustifica l'interpretazione statistica del valor medio probabilistico del numero dei successi.

2. Un giocatore estrae 5 volte una carta da un mazzo di 40 carte da briscola; la carta viene reinserita nel mazzo subito dopo ogni estrazione. Ogni volta in cui esce un asso oppure una figura il giocatore vince 4 euro, altrimenti deve pagare 3 euro.
   – Determina la probabilità che il giocatore vinca per la prima volta alla terza estrazione
   – Qual è la probabilità che dopo le 5 estrazioni il giocatore sia in perdita (all'inizio il suo capitale è zero)?

   Supponi invece che si effettuino 50 estrazioni. Precisa come calcolare mediante Excel la probabilità che il giocatore vinca almeno 30 volte.

3. In una data popolazione la probabilità che l'individuo abbia emoftoe, sapendo che ha TBC, è dell'80%; la probabilità che abbia emoftoe, sapendo che ha cancro polmonare, è del 40%. Inoltre lo 0,01% della popolazione ha TBC e lo 0,1% ha cancro polmonare.
   Assumiamo che l'emoftoe sia dovuta solo a una di queste due malattie e che non si abbiano entrambe.
   – Un individuo, scelto a caso nella popolazione, ha emoftoe. Determina la probabilità che abbia TBC; qual è la probabilità che abbia cancro polmonare?
   – * Supponi invece che la probabilità di avere emoftoe, sapendo che si ha TBC, sia q. Mostra con il calcolo che al crescere di q cresce la probabilità di avere TBC, sapendo che si ha emoftoe.

4. Qual è la probabilità che nel lancio di tre dadi a sei facce il minimo numero tra quelli usciti sui tre dadi sia 4?

5. Considera un cilindro equilatero (ossia tale che il diametro sia uguale all'altezza) e la sfera circoscritta ad esso. Qual è la probabilità che un punto scelto a caso nella sfera appartenga al cilindro?

6. Un'azienda ha 13 PC collegati ad un server che accetta, al più, 10 accessi contemporanei. Per ogni PC la probabilità p di richiedere l'accesso, ad un dato istante, è il triplo della probabilità di non richiederlo.
   – Determina il valore di p
   – Qual è la probabilità che, ad un dato istante, il server non rifiuti qualche richiesta di accesso? Indica le ipotesi che assumi sul modello.

In generale, supponiamo che l'azienda abbia un numero n di PC. Qual è il più piccolo valore di n per cui la probabilità che tutti i PC richiedano l'accesso, ad un dato istante, è minore dell'1%?

7*. Dato uno schema di n prove ripetute, ciascuna con probabilità di successo p, si dimostra che la *varianza* del numero dei successi (nelle n prove) è il numero:

$$V = 0p(0) + 1p(1) + 2^2p(2) + \cdots + n^2p(n) - M^2$$

dove $p(k)$ è la probabilità di avere k successi sulle n prove, $M = np$ è il valor medio dei successi.

– Verifica, nel caso $n = 3$, che vale $V = npq$, dove $q = 1 - p$
– Fissato n, determina per quale valore di p la varianza è massima.

Verifica di matematica

1. – Mostra come si può ricavare la derivata della funzione 3^x a partire da quella della funzione e^x
   – Considera una funzione f pari, definita su $\mathbb{R}$, e assumi che anche la sua derivata f' sia definita su $\mathbb{R}$. È vero che f' è dispari? Giustifica
   – Si vuole calcolare $(f \circ g)'(1)$. È sufficiente conoscere i valori di $f'(1), g'(1), g(1)$? Spiega.

2. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \sin^2\left(\frac{x+\pi}{3}\right)$ nel punto $x_0 = \pi$.

3. Determina i punti stazionari della funzione $f(x) = \frac{(e^{-x}-1)^3}{e^x}$. Precisa se si tratta di punti di massimo, di minimo o di flesso.

4. Tra tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 1 determina quello di superficie laterale massima.

5. Considera la famiglia di funzioni $f(x) = x(a\ln^2 x + b)$ al variare dei parametri a, b. Per quale valore dei parametri la retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = e$ ha equazione $y = \frac{x}{2} - e$?

6.* Un corpo si muove su una retta. Supponi che la sua accelerazione sia $a(t) = A\sin(\omega t)$ e che all'istante $t = 0$ si trovi nella posizione $s = 1$ e sia fermo. Prova a determinare in questo caso la sua legge oraria.
Le grandezze sono espresse in unità di misura del Sistema Internazionale.

Verifica di matematica

1. a) Esprimi in forma *ricorsiva* la generica successione aritmetica a_n e il fattoriale di un numero n
   b) La successione $a_n = \frac{3}{2^{1-3n}}$ è geometrica? Giustifica utilizzando la definizione
   c) Indica uno dei paradossi relativi agli insiemi infiniti, diverso dal paradosso "tutto-parte".

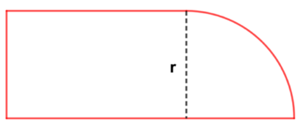
2. Un Piano di accumulo di capitale (PAC) prevede di versare ogni anno una rata di 5.000 euro. Quanto versato frutta un interesse composto annuale del 3% e dopo 20 anni dalla firma del contratto si può riscuotere tutto il capitale *(la prima rata viene versata alla firma, l'ultima un anno prima di riscuotere il capitale).*
   – Allora quale capitale si riscuote al termine dell'investimento?
   – * Supponi invece che dopo n anni dalla firma si riscuota un capitale M (il tasso di interesse e l'importo di ogni rata restano quelli indicati prima). Esprimi n in funzione di M.

3. Sia A l'insieme dei numeri *naturali* multipli di 4.
   – Mostra che A è numerabile (ossia si può mettere in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$).
   – Indica una corrispondenza biunivoca tra A e l'insieme degli *interi* pari.

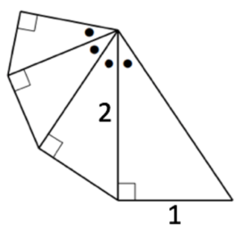
4. La funzione seguente definisce una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi indicati? Giustifica. Eventualmente modifica uno dei due intervalli in modo che la funzione sia biunivoca.
$$f\colon (0,\pi) \longrightarrow [-1,1), \qquad f(x) = \cos(2x)$$

5. Determina l'insieme di definizione delle seguenti funzioni.
$$f(x) = \sqrt{2x(3-2^{x+1})} \qquad f(x) = \frac{1}{\ln(2-|x|)} \qquad f(x) = \frac{\cos x}{2\sin x - 1}$$

6. Una squadra di curling ha deciso di stampare sulla propria divisa uno stemma formato da un rettangolo e da un quarto di cerchio, come in figura. Il perimetro dello stemma è 2 *dm*. Posto r il raggio del cerchio
   – trova la funzione $A(r)$ che dà l'area dello stemma al variare di r
   – indica quali valori può assumere, nel contesto del problema, la variabile r.



7.* Considera un triangolo rettangolo che ha cateti di lunghezza 1 e 2. Sul cateto maggiore costruisci un nuovo triangolo rettangolo simile a quello dato come mostrato in figura, e così via... Si ottiene, quindi, una successione di infiniti triangoli.
Quanto vale la somma delle aree di tutti i triangoli?



Verifica di matematica

1. a) Indica quale limite è definito in questo modo:

$$\forall c > 0\ \exists d : x > d \implies |f(x) + 1| < c$$

   b) Data la funzione $g(x) = \frac{1}{x^2}$, qual è il più grande $m \in \mathbb{Z}$ tale che $g(x) < 4 \cdot 10^{-12}$ per ogni $x < m$?

2. Calcola i limiti seguenti e giustifica in dettaglio.

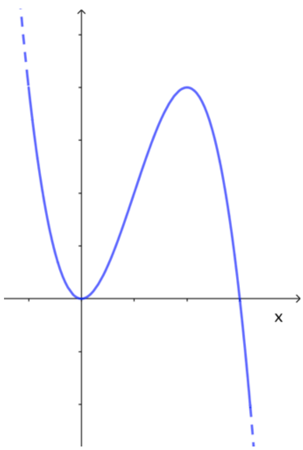
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\ln x + 1} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{3}^-} \frac{x-2}{1-2\cos x} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{2^{1-x}}{1-x^2}$$

3. Considera la funzione $f(x) = \sqrt{\frac{4x+1}{x}}$. Calcola i limiti di f agli estremi dell'insieme di definizione.

4. Traccia il grafico della funzione $f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, dopo aver studiato insieme di definizione, segno e zeri, limiti, estremi locali.
   In particolare mostra che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

5. Scrivi l'espressione di una funzione che ha un unico zero nel punto $x_0 = 3$, sapendo che il grafico ha asintoti verticali $x = 0$ e $x = -1$ ma non ha asintoti orizzontali.

6. In figura è rappresentato il grafico di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   – Determina i limiti all'infinito della funzione $e^{f(x)}$
   – Traccia il grafico qualitativo della funzione $e^{f(x)}$. Giustifica.



7*. Calcola il limite $\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n! + (n+1)!}{(n-1)! - (n+1)!}$.

8*. Si dimostra che, se per $x \to +\infty$ una funzione f ha un asintoto di equazione $y = mx + q$, allora i coefficienti della retta si trovano con le formule $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx$. Trova l'equazione dell'asintoto della funzione $f(x) = x - 2\arctan x$.

Verifica di matematica

1. Calcola i limiti seguenti, giustificando brevemente.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{(e^x-1)^2+x^2} \qquad \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

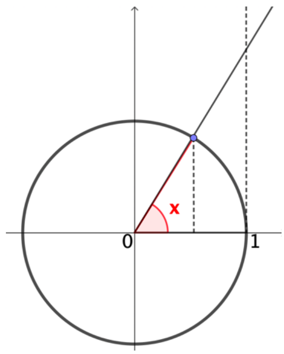
2. Traccia il grafico della funzione $f(x)=\frac{e^{2x}}{1-e^x}$ dopo aver studiato insieme di definizione, zeri e segno, limiti e derivata prima.

3. Facendo riferimento alla figura, spiega perché vale la disuguaglianza

$$\sin x < x < \tan x \qquad \text{(dove } 0 < x < \tfrac{\pi}{2}\text{)}.$$

Utilizzando il teorema del confronto, mostra poi come da essa si può dedurre il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$$



4. La funzione $f(x)=\frac{x}{\sqrt{a-bx}}$ ha un asintoto di equazione $x=2$ e la retta tangente al grafico nel punto $x_0=1$ è parallela alla retta $3x-2y=0$. Trova i valori dei parametri a e b.

5. Spiega perché il limite $\lim_{x\to 0}\frac{|x^3|}{x^3}$ non esiste.
Traccia il grafico della funzione…

6*. Prova che se per una funzione g vale $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^3}=0$, allora vale $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}=0$.
Si dimostra che la funzione coseno si può esprimere nella forma $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+g(x)$, dove g è una funzione tale che $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^3}=0$. Utilizza *questo* fatto per provare che vale

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

3.2. I materiali per anticipare la derivata

La derivata è una nozione *fondamentale* dell'Analisi e può essere impiegata per affrontare alcune *questioni* importanti che tipicamente si esaminano nella classe terza, dall'equazione della retta tangente ad una parabola alla definizione e al calcolo della velocità e dell'accelerazione. Queste sono, secondo noi, valide ragioni per introdurla già all'inizio del secondo biennio.

Ma, *come* presentarla? E *quali* aspetti considerare? Ne parliamo nella sezione 1.2.4 del volume, basandoci sulla nostra esperienza, sulle acquisizioni della ricerca e sulla normativa, mentre nel paragrafo 1.3 mostriamo un possibile schema del percorso e come esso si colloca nel quadro dei contenuti della classe terza.

In questo paragrafo intendiamo invece fornire un'idea più concreta della nostra proposta, e cerchiamo di farlo attraverso i *materiali* realizzati a supporto delle attività didattiche: tracce di attività, fogli di attività e dispense; invece i file GeoGebra e i fogli di calcolo a cui alcuni di essi fanno riferimento sono ospitati, assieme a tutti i materiali prodotti, sul sito indicato nell'Introduzione del volume.

Nell'Introduzione abbiamo anche precisato il loro significato e come si possono utilizzare, fermo restando che possono essere modificati per adattarli al contesto e al proprio modo di intendere l'insegnamento e l'apprendimento. In particolare, i suggerimenti e l'articolazione in più sotto-domande che compaiono nelle *tracce di attività* non vanno necessariamente presentati agli studenti, almeno non tutti e non all'inizio del lavoro; infatti di solito è preferibile lasciare che i ragazzi esplorino *liberamente* la questione di partenza, formulino congetture, provino a giustificarle e si confrontino con i compagni e con il docente (azioni, queste, che si intrecciano e si ripetono ciclicamente). Ne parla diffusamente la Mariotti in [Mariotti, 2022], dove promuove il ricorso a *problemi aperti*, ossia compiti che hanno le seguenti caratteristiche (pag. 159):

- *l'enunciato non induce né il metodo, né la soluzione […]. In nessun caso la soluzione si deve ridurre a l'utilizzazione o l'applicazione immediata di risultati già presentati alla classe;*
- *il problema si situa in un ambito concettuale che è familiare per l'allievo. In modo che si possa facilmente appropriarsi della situazione, essere coinvolti e impegnarsi per tentativi, congetture, progetti di soluzione.*

Piuttosto, le indicazioni e le precisazioni che si trovano nelle nostre *tracce di attività* servono al docente per formarsi un'idea più chiara di quali siano gli obiettivi dell'attività e di come si possa articolare, pur nel rispetto dei tempi di apprendimento degli studenti e valorizzando le loro intuizioni.

In modo analogo vanno considerati i *fogli di attività,* anche se per questi materiali i suggerimenti sono pochi e possono costituire un utile riferimento quando il lavoro viene svolto a casa. In questa prospettiva, le *dispense* di norma vanno consegnate in un secondo momento e costituiscono un riferimento per la rielaborazione personale, che integra le esplorazioni dei ragazzi e i loro appunti, ma non li sostituisce.

Chiarito ciò, non ci resta che lasciar parlare direttamente i materiali, ma prima ricordiamo in estrema sintesi come si collocano nel percorso.

L'idea è di partire da lontano, dai problemi di ottimizzazione, provare a risolverli mediante opportune attività, e guidare gli studenti a comprendere che, per farlo, è utile considerare la retta tangente al grafico di una funzione.

Ma cos'è la retta tangente e come si può determinare la sua pendenza? Non è una questione banale e serve a poco che sia il docente a fornire la risposta, la *sua* risposta; piuttosto, attraverso la sua mediazione, dovrebbero essere gli *studenti* a costruirla, indagando in prima persona e "*mettendo le mani*" sul problema, magari prima con carta e matita e poi mediante un software di geometria dinamica e con il foglio di calcolo. Così si dovrebbe giungere ai risultati raccolti nella prima dispensa e concludere che la pendenza del grafico si può esprimere come *limite* di un rapporto, quello tra la variazione della funzione e la variazione della variabile indipendente; sono aspetti che si possono poi consolidare con il foglio di attività *6*.

Tale limite interviene in diversi ambiti significativi, e per questo ha senso studiarlo e attribuirgli un nome, come si chiarisce nella dispensa successiva e si approfondisce nel foglio di attività *7*, che si può eventualmente esaminare in seguito se si preferisce che gli studenti dispongano presto di strumenti operativi.

Definita così la derivata, si pone il problema di come calcolarla in modo *efficiente*, a cominciare dalle funzioni potenza e dalle loro combinazioni lineari. Le formule, che si ricaveranno assieme agli studenti secondo le modalità indicate nel capitolo precedente, sono riportate in una prima dispensa sul calcolo e permettono di determinare in breve tempo la pendenza della retta tangente al grafico e i punti stazionari della funzione, come si richiede nei fogli di attività *8* e *10*. Ma permettono anche di affrontare le questioni proposte nei fogli di attività *9* e *11*: si tratta di *approfondimenti* su aspetti storici, sulla modellizzazione e sul calcolo; e, come tali, possono essere tranquillamente posticipati alle classi successive senza compromettere la sostanza del percorso.

Come si vede, la proposta è ricca e, svolta per intero, occupa circa

20 ore di lezione, pertanto è opportuno fermarsi e assegnare una verifica sommativa sugli aspetti che si vuole restino disponibili a lungo; un esempio è verifica *3* ed è mostrata nel paragrafo 3.1.

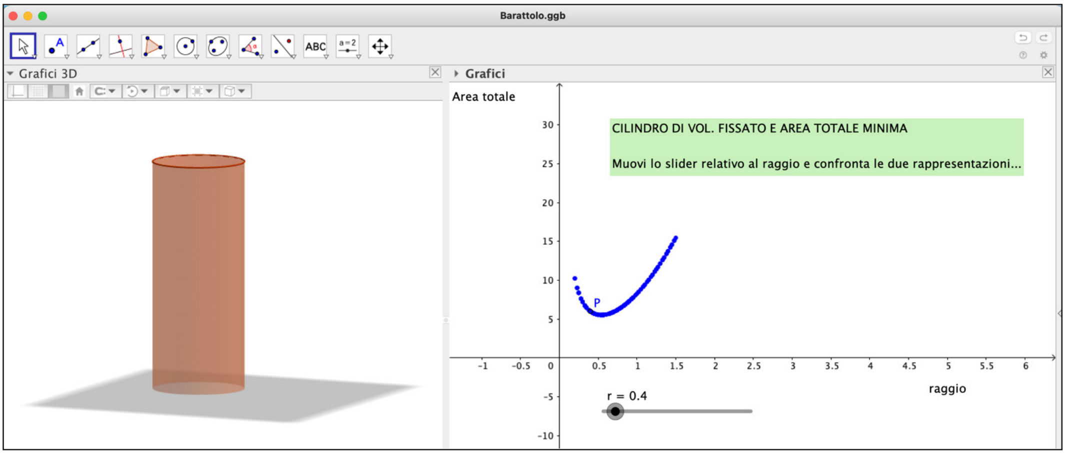
Restano ancora da esaminare alcuni aspetti di base, che permettono di affrontare più consapevolmente la risoluzione di vari problemi di ottimizzazione e di precisare l'andamento di semplici funzioni.

Il più significativo è la relazione tra derivata e *andamento* della funzione: la si investigherà mediante il foglio di attività *12*, si discuteranno collettivamente le conclusioni, sintetizzate in una dispensa, e si impiegheranno i risultati ottenuti per risolvere i semplici problemi di ottimizzazione raccolti nei fogli di attività *13* e *14*.

In aggiunta, anche se per la classe terza si configura più come *approfondimento*, si possono introdurre le formule della derivata del prodotto e del quoziente (ulteriore dispensa sul calcolo) per applicarle a questioni analoghe a quelle proposte nei fogli precedenti (fogli di attività *15* e *16*).

Complessivamente questa seconda fase del percorso sulla derivata è impegnativa e richiede almeno *15* ore di lezione, se si tiene conto anche degli approfondimenti. Al termine si può proporre una prova sommativa come verifica *4*.

Un problema di ottimizzazione



Retta tangente

La retta tangente ad una curva è la retta che interseca la curva in un unico punto?

*In generale, **no**. Ad esempio, la retta di equazione $x = 1$ interseca in un unico punto il grafico della funzione x^2, ma non è tangente alla curva. Ancora, la retta di equazione $y = 1$ è tangente al grafico di $\sin x$ anche se lo interseca in infiniti punti*[5].

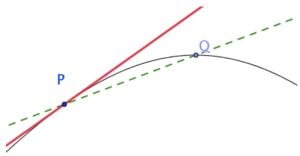
- ## Significato

La retta tangente al grafico di una funzione f in un suo punto P è la retta che, tra tutte le rette passanti per P, approssima meglio il grafico di f vicino[6] a P.

*Per visualizzare la situazione puoi utilizzare il file **TanSignificato.ggb**.*

- ## Costruzione ("definizione")

Consideriamo le rette che passano per P e per un qualsiasi punto Q del grafico di f (rette secanti per P) e facciamo tendere Q a P lungo la curva. La retta tangente al grafico di f in P è la retta che si ottiene come "limite"[7] di tali rette secanti.



*Per visualizzare la costruzione utilizza il file **TanCostruzione.ggb**.*

- ## Approssimazione

Prima di calcolare il valore esatto della pendenza, proviamo ad approssimarla.
*Considera allora l'attività **Approssimazione della retta tangente**, che prevede di ricorrere anche al foglio elettronico (**TanStima.xlsx**).*

---

[5] Studieremo più avanti la funzione $\sin x$. Per ora puoi rappresentare una porzione del grafico della funzione mediante GeoGebra.

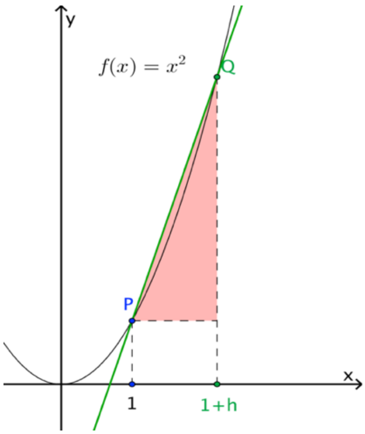
[6] I termini *approssima* e *vicino* si possono precisare rigorosamente. Nel percorso è sufficiente però che tu faccia riferimento al loro significato intuitivo.

[7] Rigorosamente ciò si può esprimere dicendo che la retta tangente è *la retta per P che ha come pendenza il limite delle pendenze delle secanti PQ quando Q tende a P lungo la curva*. E sarà chiarito con l'esempio che proponiamo di seguito. Inoltre, vedremo più avanti nel percorso che tale limite può non esistere o essere infinito.

- ## Calcolo della pendenza

Determina la pendenza della retta tangente al grafico di $f(x) = x^2$ nel suo punto di ascissa $x = 1$.

- *Per iniziare,* ***rappresentiamo la situazione*** *come in figura, dove abbiamo indicato con P il punto di ascissa* 1, *con Q il punto del grafico che ha ascissa* $1 + h$, *e* h *è un numero diverso da zero*[8].



Vediamo che cambiando il valore di h *anche il punto Q cambia. In particolare, se* h *assume valori più vicini a zero, il punto Q si avvicina al punto P; ma se* $h = 0$ *allora* $Q = P$ *e in tal caso la retta secante non esiste e il triangolo in figura neppure.*

- *Per ogni* $h \neq 0$ *determiniamo la pendenza* m_s *della retta secante PQ: considerando il* *triangolo* *evidenziato, abbiamo*

$$m_s = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{h^2+2h}{h} = h + 2.$$

Il numero m_s *dipende dunque da* h, *come d'altronde ci si aspetta per l'interpretazione geometrica di* h.

[8] Nella situazione raffigurata h è positivo, ma per determinare la pendenza della retta tangente si considerano sia valori positivi sia valori negativi di h.

- *Disponiamo così di tutti gli elementi per calcolare la pendenza della retta* ***tangente*** *in* P. *Per quanto abbiamo visto prima in generale sulla costruzione della retta tangente, la sua pendenza è il limite delle pendenze delle secanti quando* Q *tende a* P *lungo la curva. Ossia per* h *che* ***tende*** *a* 0.

  In definitiva ciò si può esprimere in simboli in questo modo

$$m_t = \lim_{h \to 0} m_s = \lim_{h \to 0} h + 2.$$

  E tale limite[9] *vale* $\mathbf{2}$.

Per visualizzare il procedimento utilizza il file ***TanCoordinate.ggb***.

In generale, la pendenza della retta tangente al grafico della funzione f nel suo punto di ascissa x_0 è

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

[9] Qui e nell'intera dispensa facciamo riferimento all'idea intuitiva di limite di una funzione. Il limite di una funzione g per x che tende ad un punto x_0 si denota con $\lim_{x \to x_0} g(x)$, e informalmente è *il valore a cui si "avvicina", con precisione a piacere,* $g(x)$ *quando* x *si "avvicina" a* x_0.

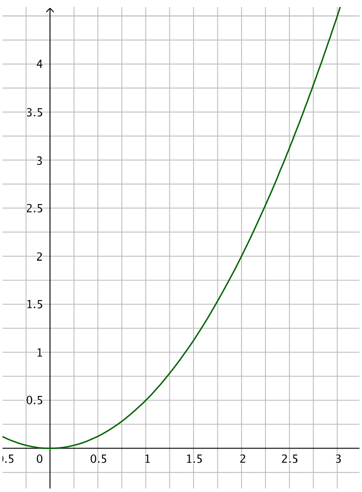
Approssimazione della retta tangente

- *Per iniziare, utilizza la* ***quadrettatura*** *e il* ***righello****.*

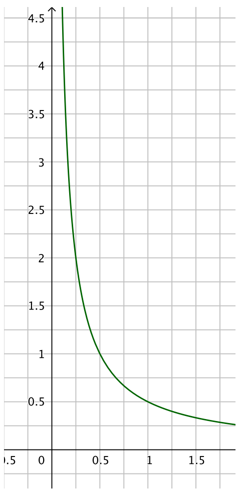
Traccia approssimativamente la retta tangente a ciascuno dei grafici seguenti nei loro punti P indicati.

- Quanto vale, circa, la pendenza?
- Stima tale pendenza, per difetto e per eccesso, mediante rette secanti.

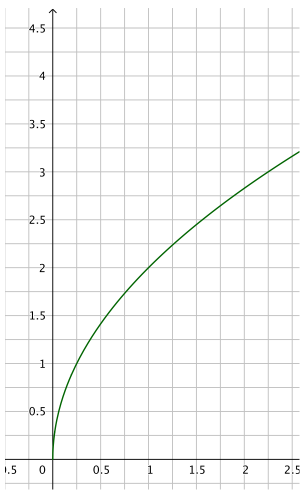
Per farlo, osserva che al crescere di x_Q*, dove* Q *è il punto diverso da* P *in cui la secante interseca la curva, cresce (diminuisce) la pendenza della secante* PQ.



$x_P = 2$



$x_P = 1$



$x_P = 1$

- *Ora utilizza il* ***foglio elettronico****.*

Stima la pendenza della tangente al grafico della funzione $f(x) = x^3$ in $x_P = 2$: trova un intervallo di ampiezza 0,2 a cui appartiene tale pendenza.

L'idea è di riprodurre mediante il foglio elettronico il procedimento seguito prima su carta.

1) *Inserisci in una colonna le ascisse* x_Q *dei punti* Q *in cui le secanti* PQ *intersecano la curva; ad esempio, dapprima puoi considerare i valori* 3, 2.9, 2.8, …

2) *Per ogni* x_Q *fissato, resta definita la pendenza* m_{PQ} *della secante per* PQ. *Inserisci il valore di* m_{PQ} *(mediante una formula) nella colonna adiacente a quella dei punti* x_Q.
3) *Il confronto tra le pendenze così generate consente di fornire un intervallo a cui appartiene la pendenza della tangente.*
4) *Se l'ampiezza di tale intervallo è* $> 0{,}2$, *costruisci un nuovo insieme di punti* x_Q *che distino meno tra loro (ad esempio,* $2.10, 2.09, \ldots$*) e, per essi, ripeti il procedimento seguito ai passi 2) e 3).*

Una realizzazione completa dell'attività si trova nel file ***Tanstima.xlsx.***

Pendenza del grafico di una funzione

1. Scrivi l'equazione della retta che incontra il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ in $x_1 = 1$ e in $x_2 = 4$.
   Considera la retta che incontra il grafico di f in $x_1 = 1$ e in $x_2 = c$ e che ha pendenza $\frac{2}{5}$.
   Prevedi che valga $1 < c < 4$ oppure che valga $c > 4$? Poi determina effettivamente il valore di c.

2. Per ciascuna delle funzioni seguenti:
   – traccia *qualitativamente* il grafico e la retta tangente nel suo punto P di ascissa indicata
   – calcola la pendenza della tangente come *limite* delle pendenze delle secanti
   – controlla se il valore mediante il calcolo è *coerente* con il disegno che hai realizzato prima
   – verifica mediante GeoGebra la correttezza del valore che hai ricavato
   Rappresenta il grafico della funzione, disegna il punto P e traccia la tangente mediante lo strumento "Tangenti" (si trova alla voce di menù relativa alle rette).

   $f(x) = x^2$ in $x_P = 2$ $\qquad$ $f(x) = \frac{2}{x}$ in $x_P = 3$

   $f(x) = x^3$ in $x_P = -1$ $\qquad$ $f(x) = (2x-1)^2$ in $x_P = 3$

3. Calcola la pendenza della retta tangente al grafico di ciascuna delle funzioni seguenti nel generico punto del grafico. Indica con x_0 la sua ascissa.

   $f(x) = x^2$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $f(x) = 2x^3 + 1$ $\qquad$ $*\, f(x) = x^n$ dove $n \in \mathbb{N}$

   Suggerimento per il caso x^n *: dimostra che* $(x_0 + h)^n = {x_0}^n + n{x_0}^{n-1}h + \cdots + h^n$*; gli addendi dal terzo in poi hanno come fattori rispettivamente* $h^2, h^3, \ldots, h^n$ *e dunque, dopo aver diviso per* h *e essere passati al limite, essi si riducono a* $0 \ldots$

   Scrivi poi l'equazione della retta tangente al grafico di tali funzioni nel punto $x_0 = -2$.

4. La pendenza del grafico di una funzione f definita sull'insieme $\mathbb{R}$ nel suo punto di ascissa x_0 vale c.
   – Allora quanto vale la pendenza dei grafici di $f + 3$ e di $-f$ in x_0?
   – Se il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse y, quanto vale la pendenza del grafico di f in $-x_0$?
   – E se il grafico è simmetrico rispetto all'origine, quanto vale la pendenza del grafico di f in $-x_0$?

5. La pendenza della retta tangente al grafico di una funzione g in un suo punto x_0 è

$$\lim_{h\to 0}\frac{2(-1+h)^3+2}{h}.$$

Scrivi una possibile espressione di g e indica un possibile valore per x_0.

6. – Calcola la pendenza della retta tangente alla parabola di equazione $y = x^2 - 3x$ nel suo punto di ascissa $x_0 = 2$. Traccia la parabola e la retta ottenuta; il disegno *suggerisce* che la retta sia effettivamente tangente?
   – Poi ricava la formula che fornisce la pendenza della tangente alla *generica* parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ nel suo punto di ascissa x_0.
   Cerca sul libro di testo l'espressione della pendenza richiesta e controlla la correttezza della tua risposta.

7*. In generale, la pendenza del grafico della funzione $\frac{1}{f}$ in un punto x_0 non è uguale al reciproco della pendenza del grafico f in x_0. Mostralo fornendo un esempio.

Alcuni risultati

1) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$; $c = \frac{9}{4}$ **2**) pendenze: 4; $-\frac{2}{9}$; 3; 20. **3**) $2x_0$; $-\frac{2}{{x_0}^3}$; $6{x_0}^2$; $n{x_0}^{n-1}$ **6**) 1.

Definizione della derivata

- ## Perché?

*Nella dispensa **Retta tangente** abbiamo concluso che la **pendenza** della retta **tangente** al grafico di una funzione f nel suo punto P di ascissa x_0 è data dal limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad (*)$$

Invece il rapporto $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *rappresenta la pendenza della generica retta **secante** in P.*

Ora osserviamo che il limite (*) si può scrivere nella forma espressiva $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.
Esso interviene in ambiti diversi, come i seguenti.

- *Detta $s(t)$ la legge oraria, la **velocità** media è data da $\frac{\Delta s}{\Delta t}$; perciò la velocità **istantanea** è*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

- *Sia $c(p)$ la funzione che esprime il costo per produrre la quantità p di un certo bene. Si vuole misurare quanto rapidamente varia c al variare di p.*
  Pertanto non si considera solo la variazione assoluta Δc, ma il suo rapporto con Δp; il suo valore istantaneo è

$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta p}$$

  *Il limite così ottenuto si dice **costo marginale** di produzione.*

- *Analogamente sia $r(x)$ la differenza di pressione del sangue in seguito alla somministrazione di una quantità x di un dato farmaco. Per misurare quanto rapidamente varia r al variare di x si ricorre al limite*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta x}$$

  *che si dice **sensitività a variazione** di un farmaco.*

In definitiva, dato che il limite (*) interviene in molte situazioni, lo si studia e gli si attribuisce un nome: derivata di f in x_0.

- ## Definizione

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione, dove I è un intervallo, e sia $x_0 \in I$. Si dice **derivata** di f nel punto x_0 il limite[10]

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La derivata si indica spesso con la notazione $f'(x_0)$, introdotta da Lagrange alla fine del XVIII secolo.

- ## Interpretazione

Perciò la pendenza del grafico di f nel suo punto x_0 è $f'(x_0)$, la velocità istantanea all'istante t_0 di un corpo che si muove con legge oraria $s(t)$ è data da $s'(t_0)$, il costo marginale relativo ad una quantità p_0 di prodotto è $c'(p_0)$…

Più in generale, la derivata misura la rapidità di variazione di f al variare di x.

E precisamente ciascuno dei simboli introdotti si può interpretare come segue

Si può utilizzare anche la **notazione espressiva** $\frac{df}{dx}(x_0)$, introdotta da Leibniz nel XVII secolo.

[10] Assumiamo che tale limite sia un numero reale. Più avanti approfondiremo i casi in cui non lo è.

Derivata di una funzione – aspetti concettuali

1. Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x+1}$, calcola in $x_0 = 3$ il *tasso di variazione* medio relativo ad una generica variazione h della variabile x e quello istantaneo.

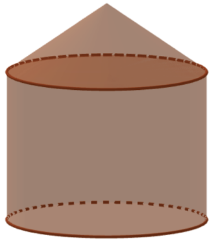
2. La retta tangente al grafico di una funzione f nel suo punto di ascissa 2 ha equazione $y = 3x - 1$.
   Quali dei seguenti valori si possono calcolare utilizzando le informazioni fornite?
   $f'(3)$ $\qquad$ $f'(2)$ $\qquad$ $f(-1)$ $\qquad$ $f(2)$

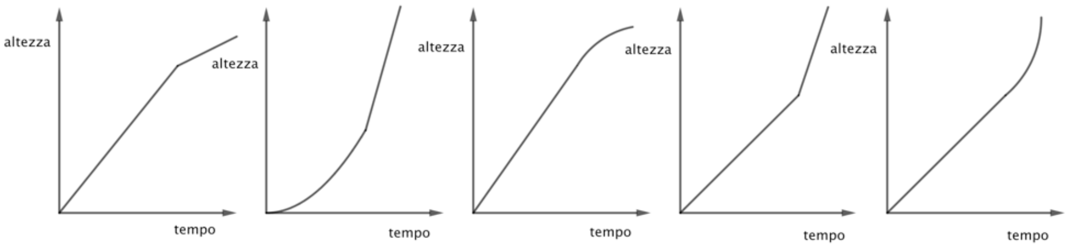
3. Di una funzione g è noto che $g'(1) = 3$ e che $g(1) = 5$. Quanto vale, circa, $g(1.2)$?

4. Sia $C(q)$ il costo per produrre q unità di un dato bene. Il costo marginale di produzione si può definire come la derivata di $C(q)$. Invece su alcuni testi il costo marginale è definito come segue.
   Il costo marginale è il costo che si deve aggiungere a $C(q)$ *per produrre* $q + 1$ *unità di quel bene.*
   - Considera la funzione costo $C(q) = 2000 + 4q + 0{,}03q^2$ e la quantità $q = 10$. *In tal caso* verifica che le due definizioni forniscono valori "vicini". Osserva che $C'(q) = 4 + 0{,}06q$
   - Spiega perché *in generale* le due definizioni forniscono valori "vicini".

5. Il tutor stradale *può* essere utilizzato per due scopi: per rilevare velocità medie oppure velocità istantanee (modalità autovelox). Con la sentenza 424 del 2018, il giudice di pace di Fermo ha dichiarato nulla la multa notificata per eccesso di velocità da un tutor in modalità autovelox, dato che tale strumento è *autorizzato*, salvo casi specifici, ad indicare solo velocità medie.
   Traccia un possibile grafico della legge oraria di un'automobile che ha velocità istantanea maggiore di 100 km/h al tempo $t = 0$ e velocità media minore di 100 km/h tra $t = 0$ e $t = 2$ ore.

6. Il contenitore in figura inizialmente è vuoto. Poi è riempito di acqua alla velocità di 10 litri al minuto.
   Quale dei seguenti grafici rappresenta l'andamento dell'altezza del livello dell'acqua al passare del tempo?





* Per ciascuno degli altri grafici forniti disegna un possibile serbatoio.

Alcuni risultati

1) Tasso variazione medio, relativo all'incremento h: $-\frac{1}{4(4+h)}$; tasso variazione istantaneo: $f'(3) = -\frac{1}{16}$ **3)** 5.6.

Derivata: primi aspetti di calcolo

- Prima scriviamo l'espressione della derivata delle **funzioni base** esaminate nel primo biennio.

Data $f(x) = k$ vale $f'(x) = 0$

$f(x) = x$ $f'(x) = 1.$

Queste formule si ottengono interpretando geometricamente la derivata come pendenza del grafico oppure mediante la definizione di derivata.

Più in generale, per le funzioni potenza si ha il seguente risultato.

Data $f(x) = x^\alpha$, dove[11] $\alpha \in \mathbb{Q}$, vale $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

per i valori di x per i quali sono definite entrambe le funzioni.

Perciò, in particolare:

se $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ *vale* $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

se $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ *vale* $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Queste formule particolari si possono dimostrare anche direttamente ricorrendo alla definizione di derivata. Non dimostreremo invece la formula generale.

- Poi esaminiamo il comportamento della derivata rispetto alle **operazioni**. Vale il seguente risultato, che non dimostriamo ma che si può intuire pensando alla interpretazione geometrica della derivata.

$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$, dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante.

Queste due proprietà esprimono il fatto che la derivata è lineare.

[11] Dato $\alpha = \frac{m}{n}$, dove $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, per definizione si ha $x^\alpha := \sqrt[n]{x^m}$. Ad esempio, $x^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{x^5}$.

Le formule indicate permettono di determinare in modo efficace la derivata di molte funzioni, come mostriamo su un esempio.

Calcola la derivata della funzione $A(x) = 2\pi x^2 + \frac{2}{x}$.

Osserviamo innanzitutto che, per le formule della derivata delle funzioni base, si ha

$$(x^2)' = 2x \quad e \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Utilizziamo allora la linearità della derivata, ottenendo

$$A'(x) = \left(2\pi x^2 + \frac{2}{x}\right)' = 2\pi \cdot (x^2)' + 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$

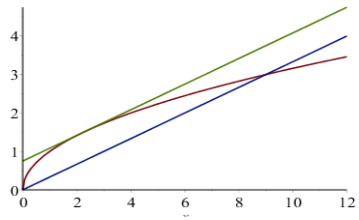
e dunque

$$A'(x) = 2\pi \cdot 2x + 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4\pi x - \frac{2}{x^2}.$$

Derivata di una funzione – formule e retta tangente

1. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + 5$ nel punto $x_0 = 1$.

2. In figura sono rappresentati il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$, la retta secante passante per l'origine O e per il punto $A(9,3)$ e la retta tangente al grafico in un punto x_0 e parallela a OA. Quanto vale x_0?



3. Si chiama *punto stazionario* di una funzione f un punto x_0 tale che $f'(x_0) = 0$.
   a) Quali sono i punti stazionari della funzione $f(x) = x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 11$?
   b) Rappresenta con GeoGebra il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 4x$; trova poi i punti stazionari di f. Per quali valori di k l'equazione $f(x) = k$ ha una, due, tre soluzioni?
   c) Ogni parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ è il grafico di una funzione f. Se $V(x_V, y_V)$ è il vertice della parabola, allora x_V è il punto stazionario di f. Utilizzando la derivata, mostra che $x_V = -\frac{b}{2a}$.

4. Quale raggio deve avere un contenitore cilindrico, senza coperchio, di volume 1 litro, in modo che la sua superficie sia minima?
   – Scrivi la formula dell'area A della superficie di un cilindro (senza "coperchio")
   – Noto il volume, puoi ricavare l'altezza del cilindro in funzione del raggio r della base
   – Puoi allora esprimere A utilizzando solo l'incognita r
   – Hai così ottenuto la funzione $A(r)$; il raggio ottimale del contenitore è il punto stazionario della funzione…

5. È data la funzione $f(x) = x^3 - ax^2$, dove $a \neq 0$. Sia r la retta tangente al grafico di f nel punto (diverso dall'origine) in cui esso incontra l'asse delle x. Per quali valori di a la retta r è perpendicolare alla retta di equazione $x + 2y + 3 = 0$?

6. Determina per quali valori di a, b la retta tangente al grafico di $f(x) = ax - b\sqrt{x} + 3$ nel punto $x_0 = 4$ ha equazione $y = 7 - x$.

Risultati

1) $y = 7x - 3$ 2) $\frac{9}{4}$

3) a) $-2, 0, 5$

b) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$; una sol. per $k > \frac{16}{3\sqrt{3}}$ oppure $k < -\frac{16}{3\sqrt{3}}$, due sol. per $k = -\frac{16}{3\sqrt{3}}$ o $k = \frac{16}{3\sqrt{3}}$,

tre sol. per $-\frac{16}{3\sqrt{3}} < k < \frac{16}{3\sqrt{3}}$

4) $A(r) = \pi r^2 + 2\pi rh$; $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi r^2}$ perciò $A(r) = \pi r^2 + \frac{2}{r}$; $A'(r) = 2\frac{\pi r^3 - 1}{r^2}$ e punto stazionario

$r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \sim 68\, mm$

5) $a = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$ 6) $a = -2, b = -4$.

Derivata di una funzione – modelli e storia

1. Un corpo viene lanciato verticalmente verso l'alto, partendo dal suolo, con legge oraria $s(t) = 12t - 5t^2$; le unità di misura dello spazio e del tempo sono quelle del S.I.

   Rispondi ai quesiti che seguono utilizzando la derivata e controlla la correttezza della risposta utilizzando le tue conoscenze sul moto uniformemente accelerato.

   - Determina la sua velocità media nei primi 2 *s* e la sua velocità iniziale.
     Traccia il grafico della funzione $s(t)$: cosa rappresentano *graficamente* i due valori trovati?
   - Calcola la velocità del corpo quando arriva al suolo
   - Determina l'accelerazione del corpo al variare del tempo t.

   Un altro corpo si muove con velocità al tempo t data da $v(t) = 3t^2 - t$. Determina una possibile legge oraria.

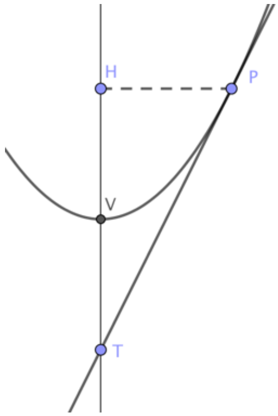
2. Determina il tasso di variazione dell'area del cerchio rispetto al raggio e il tasso di variazione del volume della sfera rispetto al raggio. Cosa rappresentano geometricamente le espressioni trovate?
   I due risultati che hai ottenuto mediante il calcolo si possono giustificare intuitivamente mediante gli strumenti del calcolo differenziale. Ma per ora ci basta averli stabiliti.

3. Per $x \geq 0$, la funzione $C(x) = 2000 + 4x + 0{,}03x^2$ rappresenta il costo per produrre la quantità x di un dato bene *[Da Matematica per le altre discipline, UMI-CIIM cap. 16].*

   - Cosa rappresenta la quantità $\frac{C(x)}{x}$? Determina il suo punto di minimo x_0 sapendo che è un punto stazionario
   - Mostra il calcolo che nel caso in esame vale $C'(x_0) = \frac{C(x_0)}{x_0}$ $(*)$
   - Quale proprietà della retta tangente al grafico di C nel punto x_0 esprime l'uguaglianza $(*)$?
   - Con GeoGebra traccia il grafico di $C(x)$ e la sua tangente in x_0. Quale caratteristica della retta tangente osservi dal grafico? Prova a giustificarla mediante l'uguaglianza $(*)$.

4. Le *sezioni coniche* di Apollonio (circa 262-190 a.C.) costituiscono il culmine della geometria greca classica. Nel libro I si esaminano anche le tangenti alla parabola e si indica un metodo per tracciarle.

Precisamente, fissato un punto P della parabola diverso dal vertice V, si considera la proiezione ortogonale H di P sull'asse di simmetria della parabola. Si individua poi il punto T tale che V sia il punto medio di TH. La retta PT è la tangente cercata.



- Prova che effettivamente PT è la retta tangente in P, utilizzando il procedimento che segue.
  a) Fissa un sistema di coordinate cartesiane e scrivi l'equazione della generica funzione f il cui grafico è la parabola data
  b) Determina, mediante la formula della derivata, quale deve essere l'espressione della pendenza m della tangente in $P(x_P, f(x_P))$
  c) Poi ricava m in un altro modo: utilizza la definizione di pendenza di una retta. E verifica che, nella situazione in esame (ossia nell'ipotesi che V sia il punto medio di TH), le due espressioni trovate per m coincidono.
- Discuti i vantaggi di utilizzare la derivata per costruire la tangente alla parabola invece di ricorrere al metodo di Apollonio.

Alcuni risultati

1) $v_{media} = 2\,m/s$; $v(0) = 12\,m/s$; $v_{suolo} = -12\,m/s$; $a = -10\,m/s^2$

3) $x_0 = 200\sqrt{\frac{5}{3}} \approx 258$

4) a) Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane: l'origine è nel vertice della parabola e l'asse delle ordinate coincide con l'asse della parabola. In tale sistema di coordinate, l'espressione analitica della nostra funzione è $f(x) = ax^2$

b) $m = f'(x_P) = 2ax_P$

c) Per semplicità, supponiamo che P sia nel primo quadrante (ma la dimostrazione è analoga se invece P è nel secondo quadrante). Consideriamo il triangolo rettangolo PTH; per la *definizione di pendenza* di una retta si ha

$$m = \frac{\overline{HT}}{\overline{HP}}$$

Ora, visto che V è il punto medio di HT, deve essere

$$\overline{HT} = 2f(x_P)$$

E così concludiamo che

$$m = \frac{\overline{HT}}{\overline{HP}} = \frac{2f(x_p)}{x_p} = \frac{2a(x_p)^2}{x_p} = 2ax_p$$

E questa espressione di m coincide con quella ricavata nel punto b, che sappiamo essere la pendenza della tangente.

Derivata di una funzione – ancora retta tangente

1. Considera i due punti $P(-4,-\frac{1}{4})$ e $Q(-1,-1)$ del grafico della funzione $f(x)=\frac{1}{x}$. Scrivi le equazioni delle due rette tangenti al grafico di f che sono parallele a PQ.

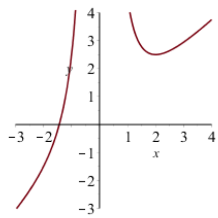
2. Da un punto P del grafico della funzione $f(x)=\frac{1}{x}$ tracciamo la retta tangente r. Se r passa per il punto $(2,-4)$, quali sono le coordinate di P?

3. Trova le equazioni delle due tangenti al grafico della funzione $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$ che passano per il punto $A(-1,-1)$. Verifica che le due rette sono perpendicolari.

   Suggerimento. Indicata con c l'ascissa del generico punto P del grafico di f, si ha P $(c,\frac{1}{2}c^2+c)$.
   Per determinare c ti proponiamo due approcci e ti invitiamo a provarli entrambi:
   a) *scrivere l'equazione della retta tangente nel punto P ed imporre poi che passi per il punto A*
   b) *imporre che la pendenza del grafico di f in P sia uguale a quella del segmento PA.*

4. Trova il punto stazionario della funzione $f(x)=1-3\sqrt{x}+x$. Mostra che la funzione $f(x)=1-3\sqrt{x}-x$ non ha punti stazionari.

5. In figura è rappresentato il grafico di $f(x)=\frac{4}{x^2}+x-\frac{1}{2}$. Trova il punto stazionario di f e indica per quali valori di k l'equazione $f(x)=k$ ha una, due o tre soluzioni.



6. Per quali valori di k la funzione $f(x)=x^3-x^2+kx+3$ non ha punti stazionari?

7. Considera le parabole di equazione $y=ax^2$, dove $a>0$. Trova per quale valore del coefficiente a la retta tangente alla parabola nel punto $x_0=\frac{1}{3}$ forma con il semiasse positivo delle x un angolo di 30°.

8. Dopo aver determinato zeri e punti stazionari della funzione $f(x)=x^3-x^2-x$, tracciane il grafico.

Risultati

1) $y = -\frac{1}{4}x+1$ e $y = -\frac{1}{4}x-1$ 2) Ci sono due punti P: $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ e $(-1, -1)$ 3) $y = x$ e $y = -x - 2$

4) $x_0 = \frac{9}{4}$ 5) $x_0 = 2$; una sol. per $k < \frac{5}{2}$, due sol. per $k = \frac{5}{2}$, tre sol. per $k > \frac{5}{2}$

6) Deve essere $\Delta < 0$, quindi $k > \frac{1}{3}$ 7) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

8) Zeri $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, 0; punti stazionari: $-\frac{1}{3}$, 1; per tracciare il grafico calcola anche il valore della funzione nei punti stazionari.

Derivata di una funzione – aspetti di calcolo e dimostrazioni

1. Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.
   [*Esame 2018, quesito n. 3*]

2. Consideriamo la funzione $f_k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita: $f_k(x) = -x^3 + kx + 9$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   - Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$
   - Verifica che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10; determina i punti stazionari della funzione $f_1(x)$ e l'equazione della retta tangente in essi
   - * Dimostra che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado n non può possedere più di $2n - 1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.

   [*Esame 2018, dal problema n. 2*]

3. Per quali valori di k la funzione $f(x) = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?
   [*Esame 2009, quesito n. 3*]

4. Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?

$$\lim_{h \to 0} \frac{5\left(\frac{1}{2} + h\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}$$

   [*Esame 2012, quesito n. 1*]

5. Si dimostri che per gli zeri[4] x_1, x_2 della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale

$$f'(x_1) + f'(x_2) = 0$$

   e si dia un'interpretazione geometrica dell'affermazione dimostrata.
   [*Esame 2010, suppletiva, quesito n. 4*]

   Suggerimento. Prima verifica la proposizione per una funzione particolare, ad esempio $f(x) = x^2 - 4$.
   Nel caso generale usa la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado per ricavare l'espressione di x_1 e x_2.

[4] Stiamo assumendo che tali zeri esistano.

6. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n!a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.
[*Esame 2010, quesito n. 1*]

Suggerimento. Prima verifica la formula per un polinomio particolare, ad esempio $p(x) = 7x^3 + 2x$. *Poi considera il generico polinomio di grado* n*: la derivata del termine costante di* p *è…, la derivata seconda del termine di primo grado di* p *è …*

Risultati

1) $k_1 = \frac{167}{27}$, $k_2 = 5$.

2) Punti stazionari $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; l'equazione della tangente in x_1 è $y = -\frac{2}{3\sqrt{3}} + 9$, in x_2 è $y = \frac{2}{3\sqrt{3}} + 9$

3) $k = \pm 3$.

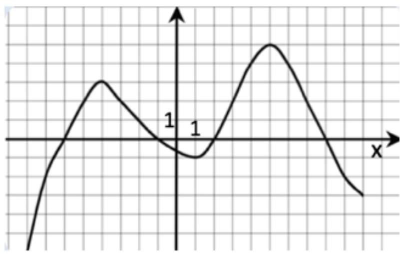
Andamento funzione e derivata

1. Considera il grafico della funzione $f: [-8,10] \to \mathbb{R}$ rappresentato in figura.
   - Tracciando approssimativamente la retta tangente, determina circa quanto vale:

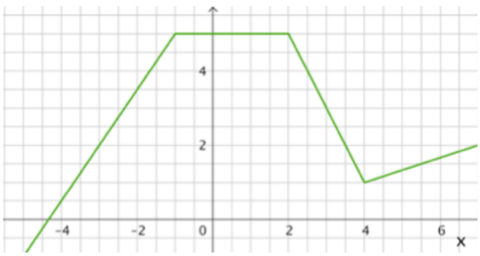
     $f'(-5)$ $\qquad$ $f'(-1)$ $\qquad$ $f'(6)$

   - Individua un numero c tale che $f(c) > 2$
   - I punti stazionari di f sono -4, 1, 5; trova per quali x vale

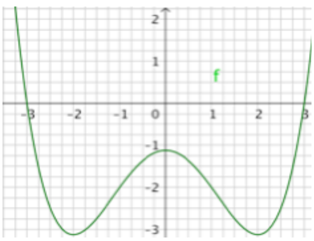
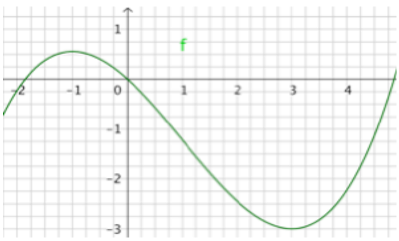
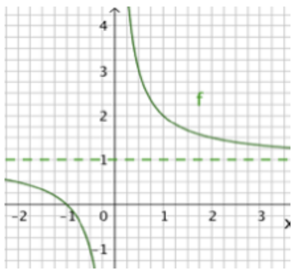
     $f'(x) > 0$ $\qquad$ $f'(x) < 0$



2. Considera il grafico della funzione f in figura e traccia il grafico della funzione[5] f'.



3. In figura sono tracciati i grafici di tre funzioni f. Per ciascuno traccia qualitativamente il grafico di f'.

Per comprendere, utilizza anche i file ***FunzioneDerivata1.ggb*** e ***FunzioneDerivata2.ggb****, relativi alla prima funzione.*

[5] La funzione f' non è definita per ogni x reale; ad esempio non lo è in $x = -1$. Ce ne occuperemo più avanti.

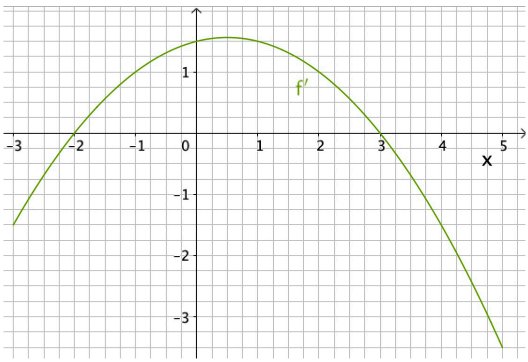
4. In ciascun caso disegna il grafico di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che f' verifichi le condizioni indicate.
   a) $f'(x) < 0$ solo per $x \in (-\infty, -5) \cup (-2,3) \cup (3, +\infty)$
   $f'(-5) = 0,\ f'(-2) = 0$ e $f'(3) = 0$

   b) $f'(x) > 1$ per $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$
   $0 \le f'(x) \le 1$ per $x \in (0,3)$

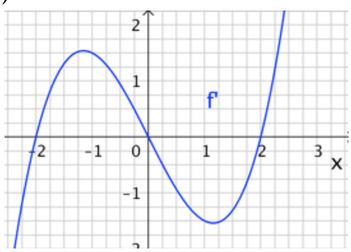
   c) $f'(x) > 0$ solo per $x \in (-\infty, 0) - \{-2\}$
   tangente al grafico di f in $x = 2$ di equazione $x + y + 1 = 0$

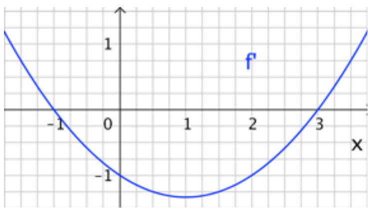
   d) $f'(0) = 1$
   f' minima in $x = 0$.

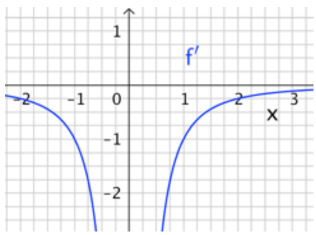
5. In figura è tracciato il grafico della funzione f'. Prova a tracciare un possibile grafico qualitativo di f.



Alcuni risultati
1) $f'(x) > 0$ per $x \in [-8, -4) \cup (1, 5)$; $f'(x) < 0$ per $x \in (-4, -1) \cup (5, 10]$
3)







Derivata e andamento della funzione

*Con il **foglio di attività 12** abbiamo **intuito** il legame tra la crescenza (decrescenza) della funzione e l'andamento della derivata nonché tra i massimi (minimi) e la derivata. Ora ci proponiamo di precisare tale relazione; in particolare intendiamo trovare **condizioni sulla derivata** per le quali la funzione sia crescente e condizioni per le quali si abbia un estremo locale.*
I risultati a cui arriveremo si possono dimostrare, tuttavia noi non lo faremo in questa fase del percorso.

Per semplicità, consideriamo una funzione f definita su un intervallo I e assumiamo che esista la derivata per ogni punto dell'intervallo.

Crescenza[14] di f e derivata

Teorema. Se la funzione f è crescente in I allora $f'(x) \geq 0 \; \forall \, x \in I$.
Vale anche il risultato inverso: se $f'(x) \geq 0 \; \forall \, x \in I$ allora f è crescente in I.

Un analogo risultato vale per le funzioni decrescenti.
Il risultato inverso è proprio la condizione cercata, ossia quello che utilizzeremo spesso nelle applicazioni.

Punto di massimo locale[15] e derivata

- In vari casi, se x_0 è punto di massimo allora vale $f'(x_0) = 0$. Questo è un fatto vero in generale?

  No. Ad esempio, la funzione $f(x) = 1 - x$ in $[0,1]$ ha massimo in $x_0 = 0$ ma $f'(x_0) = -1$.

  Dunque se il punto di massimo appartiene al bordo non è detto che la derivata si annulli in esso. Se invece il punto non appartiene al bordo la derivata si annulla e precisamente vale il seguente risultato.

[14] Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ si dice **crescente** se $\forall \, x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) \leq f(x_2)$. La definizione di funzione decrescente è analoga.
[15] Data una funzione $f: A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A$ si dice **punto di massimo locale** (o relativo) per f se esiste un intervallo aperto U tale che $x_0 \in U$ e vale $f(x) \leq f(x_0) \; \forall \, x \in U \cap A$.
Esercizio. Scrivi la definizione di minimo locale. Poi prova a scrivere la definizione di massimo globale (o assoluto) di una funzione.

Teorema. Se f ha un punto di massimo o di minimo locale x_0 e il punto x_0 non appartiene al bordo di I, allora vale $f'(x_0) = 0$.

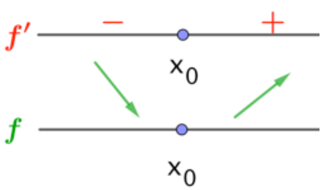
In altri termini, nelle ipotesi del teorema, l'annullarsi della derivata in un punto è una ***condizione necessaria*** *affinché tale punto sia di minimo oppure di massimo locale.*

- Tale condizione è anche **sufficiente**? Ossia è vero che se vale $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di massimo o di minimo locale per la funzione? **No.**

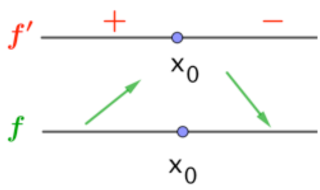
Controesempio. La funzione $f(x) = x^3$ ha derivata $f'(0) = 0$, ma $x_0 = 0$ non è punto di massimo o di minimo locale.

- Serve allora **trovare** delle **condizioni sufficienti** affinché un punto stazionario sia punto di massimo o di minimo locale.

Teorema. Sia x_0 un punto tale che $f'(x_0) = 0$ e che non appartiene al bordo di I. Se il segno di f' è quello schematizzato nella prima riga dello schema (in rosso), allora la natura del punto è quella indicata nelle righe inferiori.

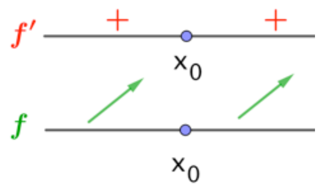


x_0 è punto di **minimo locale**
Es. $f(x) = x^2$ in $x_0 = 0$



x_0 è punto di **massimo locale**

Es. $f(x) = 1 - x^2$ in $x_0 = 0$



x_0 punto di **flesso**
Es. $f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$

Tuttavia gli schemi, per quanto espressivi, non sono sempre precisi. Pertanto ti invitiamo ora a precisare quanto suggeriscono gli schemi proposti.

Esercizio. Esprimi mediante il linguaggio delle funzioni i risultati schematizzati in tabella.

Problemi di ottimizzazione

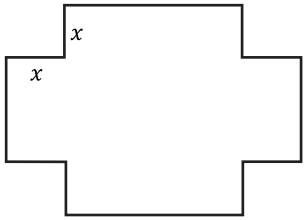
1. Disegna una sfera di raggio 1 e un cono inscritto nella sfera, in modo che il centro della sfera sia interno al cono. Indica con x la distanza del centro della sfera dalla base del cono.
   - Ricava la funzione che dà il volume del cono al variare di x
   - Quali valori può assumere, nel contesto del problema, la variabile x?
   - Per quale valore di x si ha il massimo volume?

2. Disegna un cono di raggio r e altezza 1 e un cilindro inscritto nel cono. Sia x il raggio del cilindro.
   - Ricava la funzione $V(x)$ che fornisce il volume del cilindro al variare di x
   - Per quale valore di x si ha il massimo volume?
   - Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono. [*Esame 2018, quesito 1*]
     Suggerimento. Ripeti il calcolo svolto nei primi due passi dell'esercizio, considerando ora una generica altezza h del cono; poi confronta il volume del cilindro massimo così ottenuto con il volume del cono.

3. Disegna la parabola di equazione $y = 4 - x^2$; nel primo quadrante, ciascuna tangente alla parabola delimita con gli assi coordinati un triangolo.
   - Sia c l'ascissa del generico punto della parabola nel primo quadrante; scrivi l'equazione della tangente in c
   - Individua i punti in cui la tangente incontra gli assi e scrivi una formula per l'area $A(c)$ del triangolo
   - Quali valori può assumere, nel contesto del problema, la variabile c?
   - Determina per quale valore di c l'area del triangolo è minima.

4. Tra i parallelepipedi di base quadrata e area totale 8, qual è quello di massimo volume?
   - Indica con x il lato della base del solido e determina la funzione che dà il volume al variare di x; quali valori può assumere, nel contesto del problema, la variabile x?
   - Per quale valore di x si ha il massimo volume? Qual è il volume massimo?

5. Hai un foglio di cartone i cui lati misurano $80\ cm$ e $60\ cm$. Dal foglio ritagli, negli angoli, 4 quadrati di lato x e pieghi il cartone per ottenere una scatola.
   - Trova il volume $V(x)$, della scatola in funzione di x
   - Quali valori può assumere x nel contesto del problema?
   - Per quale valore di x (in mm) la scatola ha volume massimo?



6. Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio $60\ cm$. Quale è la capacità in litri del serbatoio? [*Esame 2011, quesito 1*]
   Suggerimento. Considera come incognita, in centimetri, la metà dell'altezza del cilindro.

Risultati

1) $V(x) = \frac{\pi}{3}(1 + x - x^2 - x^3),\ x_{max} = \frac{1}{3}$

2) $V(x) = \frac{\pi}{r}(-x^3 + rx^2);\ x_{max} = \frac{2}{3}r;$

da Esame: $V(x) = \pi\frac{h}{r}(-x^3 + rx^2),\ x_{max} = \frac{2}{3}r;\ V_{cil.max} = \frac{4}{27}\pi hr^2 < \frac{1}{2}V_{cono} = \frac{1}{6}\pi hr^2$

3) $A(c) = \frac{1}{4}\left(c^3 + 8c + \frac{16}{c}\right),\ c_{min} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ **4)** $V(x) = \frac{1}{2}(-x^3 + 4x),\ x_{max} = \frac{2\sqrt{3}}{3},\ V_{max} = \frac{8}{9}\sqrt{3}$

5) $V(x) = 4(x^3 - 70x^2 + 1200x),\ x_{max} = \frac{70-10\sqrt{13}}{3}\ cm \approx 113\ mm$

6) $V(x) = 2\pi(-x^3 + 3600x),\ x_{max} = 20\sqrt{3},\ V_{max} \approx 522\ l.$

Problemi di ottimizzazione – ulteriori quesiti

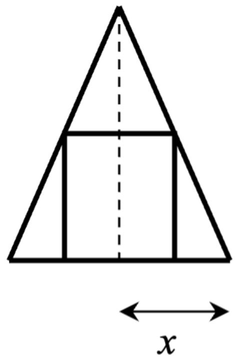
1. Tra tutti i coni che hanno apotema di lunghezza a determina quello di volume massimo. [*Analogo a Esame 2012, quesito 4*]
   - Sia x la lunghezza dell'altezza del cono; ricava la funzione che dà il volume del cono al variare di x
   - Quali valori può assumere, nel contesto del problema, la variabile x?
   - Per quale valore di x si ha il massimo volume?
   - Utilizzando quanto hai ricavato, rispondi al quesito posto all'esame di stato
   - Se invece scegliessi come incognita x il raggio del cono, quale sarebbe la funzione volume? Discuti quale delle due scelte per x è più efficiente.

2. Considera i parallelepipedi a base quadrata che hanno diagonale (del parallelepipedo) di lunghezza 2. Determina, tra essi, il parallelepipedo di volume massimo.
   Suggerimento. Poni come incognita la lunghezza dell'altezza.

3. Data una parabola di equazione $y = 1 - ax^2$, con $a > 0$ si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x nel segmento parabolico delimitato dall'asse x. Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo. [*Esame 2016 quesito 2*]
   - Osserva che ogni rettangolo inscritto e con un lato sull'asse x è univocamente determinato una volta fissato il suo vertice *P* che sta sull'asse x e che ha ascissa positiva. Assumi come incognita l'ascissa x di *P*. Determina per quale x, in funzione di a, si ottiene il rettangolo di area massima
   - Poi determina per quale x, in funzione di a, si ottiene il rettangolo di perimetro massimo
   - Infine determina il valore di a richiesto dal quesito.

4. Con una staccionata lunga 2 *m* si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura. Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima. [*Esame 2018, quesito 5*].
   Suggerimento. Poni come incognita x la lunghezza del raggio.
   Puoi risolvere questo quesito anche senza ricorrere alla derivata? Perché?

5. È dato un rettangolo di base 2 e altezza 3; considera i triangoli isosceli "circoscritti" al rettangolo, come in figura.
Per svolgere il quesito serve utilizzare la formula della derivata del quoziente.
   - Indicata con x la lunghezza di metà della base del triangolo, trova la funzione $A(x)$ che descrive l'area del triangolo al variare di x.
   - Quali valori può assumere, nel contesto del problema, la variabile x?
   - Per quale x tale area è minima? Quanto vale l'area minima?



Risultati

1) $V(x) = \frac{\pi}{3}x(a^2 - x^2) = \frac{\pi}{3}(a^2x - x^3)$, $x_{max} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$; per $a = 1$ si ha $V_{max} \approx 403\ l$

2) $V(x) = \frac{1}{2}x(4 - x^2) = \frac{1}{2}(4x - x^3)$, $x_{max} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

3) $A(x) = 2(x - ax^3)$, $x_{max} = \frac{1}{\sqrt{3a}}$; $P(x) = 2(1 + 2x - ax^2)$, $x_{max} = \frac{1}{a}$; risposta quesito: $a = 3$

4) $A(x) = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x^2 + 2x$, $x_{max} = \frac{2}{\pi+4}$ e dunque le dimensioni del rettangolo sono $\frac{4}{\pi+4}$ e $\frac{2}{\pi+4}$

5) $A(x) = \frac{3x^2}{x-1}$, $x_{min} = 2$, $A_{min} = 12$.

Derivata: ulteriori aspetti di calcolo

Abbiamo già esaminato il comportamento della derivata rispetto alle operazioni di addizione e di moltiplicazione per una costante. Ora consideriamo le operazioni di ***moltiplicazione*** *e di* ***divisione****.*

- È vero che $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$?

  In generale, no. Un ***controesempio*** *è dato dalle funzioni* $f(x) = 1$ e $g(x) = x$.
  Infatti $(f \cdot g)' = (x)' = 1$, *mentre* $f' \cdot g' = (1)' \cdot (x)' = 0 \cdot 1 = 0$.

  E analogamente, in generale, la derivata del quoziente di due funzioni non è il quoziente delle derivate.

- Allora, quali formule valgono per la derivata del prodotto e del quoziente?

  Almeno per il prodotto possiamo prevedere la struttura della formula. Infatti, dato che $f \cdot g = g \cdot f$, *allora nella derivata del prodotto le funzioni e le loro derivate devono comparire in modo* ***simmetrico****, ossia se si scambia* f *con* g *e* f' *con* g', *la formula deve rimanere uguale. E questo non vale per la formula del quoziente, dato che* $\frac{f}{g} \neq \frac{g}{f}$.

- Si può dimostrare che

$$(fg)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Calcola la derivata della funzione $h(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$.

Per la formula della derivata del quoziente si ha

$$h'(x) = \frac{(x^3)'(1-x^2)-x^3(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}.$$

Esplicitando le derivate indicate si ottiene

$$h'(x) = \frac{3x^2(1-x^2)-x^3(-2x)}{(1-x^2)^2}.$$

A questo punto è opportuno fermarsi: come manipolare ulteriormente l'espressione ottenuta dipende dall'obiettivo del quesito. Anzi, magari non è nemmeno opportuno farlo; ad esempio, per determinare $h'(2)$ *basta sostituire* $x = 2$ *nell'espressione. Se invece serve studiare il segno della derivata, allora è utile scomporre in fattori il polinomio a numeratore; per farlo potremmo prima svolgere le moltiplicazioni dei polinomi che compaiono, tuttavia preferiamo raccogliere direttamente il fattore* x^2, *che è comune ad entrambi gli addendi*

$$h'(x) = \frac{x^2(3-3x^2+2x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

Calcola la derivata della funzione $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+x+1}$.

La derivata $h'(x)$ *è data dalla seguente espressione:*

$$\frac{\left(\sqrt{x}\right)'(x^2+x+1)-\sqrt{x}(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x^2+x+1)-\sqrt{x}\cdot(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x^2+x+1-4x^2-2x}{2\sqrt{x}}}{(x^2+x+1)^2}$$

Nell'ultimo passaggio, $-4x^2-2x$ *si ottiene da* $-2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot(2x+1) = -2x\cdot(2x+1)$.

Così

$$h'(x) = \frac{\frac{-3x^2-x+1}{2\sqrt{x}}}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{3x^2+x-1}{2\sqrt{x}\,(x^2+x+1)^2}.$$

Derivata – ulteriori aspetti di calcolo e applicazioni

1. Dopo aver determinato i punti stazionari delle seguenti funzioni, stabilisci se si tratta di punti di massimo o di minimo o di flesso a tangente orizzontale.

   a) $f(x) = -4x^3 + 9x^2$ b) $f(x) = \sqrt{x} - x$ c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$ d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

   e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ f) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ g) $f(x) = x^2(\sqrt{x} - 1)$ h) $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2+1}$

2. Considera le funzioni a), b), e), f), h) dell'esercizio 1.
   Per ciascuna di esse, oltre a quanto già ricavato, determina gli zeri della funzione e i valori assunti nei punti stazionari.
   Poi prova a tracciare il grafico e controlla la sua correttezza mediante GeoGebra.

3. Considera la funzione $C(p)$ che esprime il costo per produrre una quantità p di un dato bene e sia p_0 il punto di minimo della funzione costo medio $\frac{C(p)}{p}$.
   Dimostra che vale $C'(p_0) = \frac{C(p_0)}{p_0}$.

4. Il grafico della funzione $f(x) = \frac{ax+1}{x^2}$ ha pendenza $\frac{1}{2}$ nel punto $x_0 = -2$. Quanto vale a?

5. Scrivi l'equazione della parabola con vertice sull'asse y tale che la retta ad essa tangente nel punto $x_0 = 1$ abbia equazione $y = 3x - 2$.

6. Determina per quale valore del parametro k e in quale punto
   – il grafico della funzione $f(x) = 2 - kx^2$ è tangente al grafico della funzione $g(x) = \frac{1}{x}$
   – il grafico della funzione $f(x) = k\sqrt{x}$ è tangente al grafico della funzione $g(x) = x^2 + 1$.

7. Individua il valore di k per cui la tangente nell'origine al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x-k}$$

   forma un angolo di $\frac{\pi}{6}$ radianti con l'asse delle ascisse.
   [*Quesito 2, simulazione esame del 20/12/2018*]

8. Giustifica la formula per la derivata del quoziente di due funzioni, $\frac{f}{g}$, mediante il procedimento che segue.
Assumi che la formula sia valida nel caso particolare $\frac{1}{g}$, *ossia che valga* $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$.
Osserva che $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, *e utilizza la formula della derivata del prodotto…*

Risultati

1) 0 p.to min, $\frac{3}{2}$ p.to max; $\frac{1}{4}$ p.to max; -2 p.to max, 0 p.to min; 1 p.to max; 1 p.to flesso;
$1-\sqrt{2}$ p.to min, $1+\sqrt{2}$ p.to max; 0 p.to max, $\frac{16}{25}$ p.to min; $-\sqrt{\sqrt{5}-2}$ p.to max, $\sqrt{\sqrt{5}-2}$ p.to min.

4) $a=-1$ 5) $y=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$ 6) $k=\frac{32}{27}$, $x_0=\frac{3}{4}$; $k=4\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt[4]{27}}$, $x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 7) $k=-\sqrt{3}$.

Derivata – consolidamento e approfondimento

1. Consideriamo la funzione $f: [0,4] \to \mathbb{R}$ il cui grafico è il seguente:

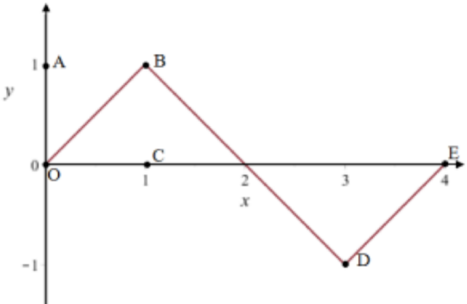
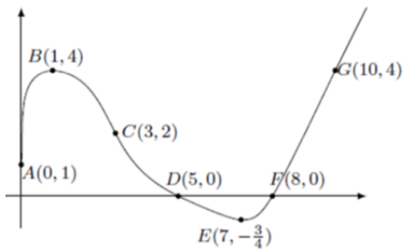


Figura 1

Come si evince dalla Figura 1, i tratti OB, BD, DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0,0), B(1,1), D(3,-1), E(4,0)$. Rappresenta per $x \in [0,4]$ il grafico di $g(x) = f'(x)$.
[Da *Esame 2017, problema 2, parte della richiesta 1*]

2. In figura è rappresentato il grafico Γ della funzione $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.



È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B e E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$. Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G.

a) In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni $y = f'(x)$.
Quali sono i valori di $f'(3)$ e di $f'(5)$? Motiva la tua risposta

b) Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:
$y = |f'(x)|$, $y = |f(x)|'$.

[Da *Esame 2016, problema 2, parte delle richieste 1, 2*]

3. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4,0).
   [*Esame 2011, quesito 2*]
   Suggerimento. Minimizza la funzione quadrato della distanza.

4. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di $50\ cm^2$, margini superiore e inferiore di $4\ cm$ e margini laterali di $2\ cm$. Quali sono le dimensioni del foglio di area minima che si può utilizzare?
   [*Esame 2006, quesito 3*]

5. Stabilire se le rette $r\colon\ y = 5x - 6$, $s\colon y = 21x + 25$ sono tangenti alla curva δ di equazione $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.
   [*Esame 2017 suppletiva, quesito 8*]

6. Si determini al variare di k il numero di soluzioni reali dell'equazione $x^3 - 3x^2 + k = 0$.
   [*Esame 2008, quesito 7*]
   Suggerimento. Conviene scrivere l'equazione nella forma $3x^2 - x^3 = k$.

Risultati

3) $\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ 4) 9 cm e 18 cm 5) r non è tangente, s è tangente

6) 1 soluzione per $k < 0$ oppure per $k > 4$; 2 soluzioni per $k = 0$ oppure $k = 4$; 3 soluzioni per $0 < k < 4$.

3.3 I materiali per investigare le funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche, assieme alle funzioni polinomiali e alle funzioni esponenziali, sono funzioni *basilari* e intervengono nella *modellizzazione* di molti fenomeni periodici, come quelli relativi alle onde.

La nostra idea è di introdurre seno, coseno e tangente già nel primo biennio, e di farlo in un contesto *geometrico* come rapporto tra lati nel triangolo rettangolo, soprattutto allo scopo di determinare lunghezze di segmenti o ampiezze di angoli a partire da alcune misure assegnate ([Cappello e Innocenti, 2022, sez. 2.3.6]). Invece l'esame di tali oggetti matematici come *funzioni* può essere proposto all'inizio della classe quarta, a meno che non sorgano esigenze didattiche per collocarlo già nella classe terza, magari per discutere questioni di fisica.

Entrando più nel dettaglio, come *pianificare* un percorso sul tema, ovvero quali scelte didattiche si dovrebbero compiere e per quali ragioni? E come *declinare* operativamente tali scelte in classe?

Alla prima domanda rispondiamo nella sezione 2.2.1 di questo volume e con la sintesi presentata nel paragrafo 2.3. Invece alla seconda vogliamo rispondere mostrando i materiali costruiti a supporto delle attività didattiche, da utilizzare secondo le modalità illustrate nell'Introduzione; semmai ribadiamo l'attenzione allo sviluppo di abilità/competenze, ad esempio quelle relative alla comunicazione, come indicato in [MIUR, 2018b, pag. 12]:

> *"In particolare, la matematica (…) contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri".*
> *Tali competenze sono rilevanti per la formazione di una cittadinanza attiva e consapevole, in cui ogni persona è disponibile all'ascolto attento e critico dell'altro e a un confronto basato sul riferimento ad argomenti pertinenti e rilevanti. In particolare l'educazione all'argomentazione può costituire un antidoto contro il proliferare d'informazioni false o incontrollate.*

La prima tappa del percorso di trigonometria nel secondo biennio è *estendere* le funzioni trigonometriche ad angoli qualsiasi, costruirne il grafico e passare ad interpretarle come funzioni di un *numero* reale; questo lavoro è sintetizzato nella prima dispensa[1] che mostriamo di seguito e che, lo ricordiamo, costituisce il *punto di arrivo* di quanto dovrebbe emergere dalla discussione in classe, magari a partire da un

[1] Come per gli altri blocchi del percorso, le dispense e le tracce di attività fanno riferimento a file GeoGebra che sono ospitati, assieme a tutti i materiali realizzati, sul sito al link https://sites.google.com/unitn.it/currmatsssg.

problema come quello di descrivere efficacemente il moto circolare.

Questo modo più generale di pensare seno e coseno permette di impiegare le funzioni trigonometriche per modellizzare fenomeni periodici. In classe lo si può fare partendo, ad esempio, dal problema di rappresentare mediante una funzione il suono emesso da un diapason (una delle attività che riguardano gli aspetti acustici). È una questione che i ragazzi investigano come proposto nella sezione 2.2.1, ovvero "mettendoci le mani", avanzando congetture e provando a generalizzarle; per la rielaborazione possono poi contare su un'ulteriore dispensa, mentre per il consolidamento e l'approfondimento possono far riferimento ai primi due fogli di attività, mediante i quali cureranno la costruzione e l'analisi di *grafici* di alcuni modelli periodici elementari. Grafici e modellizzazione sono, del resto, le due parole chiave su cui si basa l'intero percorso relativo alle funzioni trigonometriche.

Su questo lavoro si fonda la risoluzione delle *equazioni* e delle *disequazioni* trigonometriche, che proponiamo di interpretare mediante le funzioni e i *grafici*, secondo l'approccio ormai usuale nel percorso (fogli di attività *3* e *4*).

Inoltre, preferiamo investire del tempo per congetturare la *derivata* delle funzioni seno e coseno in opportune attività, e poter così determinare l'equazione della retta tangente al grafico e gli estremi di semplici funzioni trigonometriche ma anche velocità e accelerazione in particolari moti periodici, come si richiede nel foglio di attività *5*.

E le formule trigonometriche? Abbiamo già osservato nel capitolo precedente che l'unica di cui serve davvero disporre nella scuola secondaria è la formula di addizione del seno e che un ottimo riferimento per introdurla è la prima parte del percorso guidato *Trigonometria 2* del progetto [Orientamat, 2006], che si può utilizzare sostanzialmente in due modi diversi: come *dispensa* per rielaborare quanto discusso prima a scuola oppure come traccia per orientare il lavoro autonomo dello studente. Ulteriori quesiti sul tema si trovano anche nel foglio di attività *6*, che è rivolto anche al riepilogo degli aspetti principali che riguardano le funzioni trigonometriche.

E con questo il percorso ci sembra completo. Tuttavia può valer la pena *approfondire* ulteriormente i fenomeni acustici mediante le attività che proponiamo nella sezione 2.2.1 e che prevedono di ricorrere anche ad un software per l'analisi dei suoni come Audacity.

In definitiva, ci sentiamo di dire che l'insieme dei materiali che abbiamo realizzato sul tema possono *sostituire* il libro di testo; al più, qualora si renda necessario, si possono integrare con esercizi di consolidamento analoghi a quelli proposti, mirati sulle esigenze della classe.

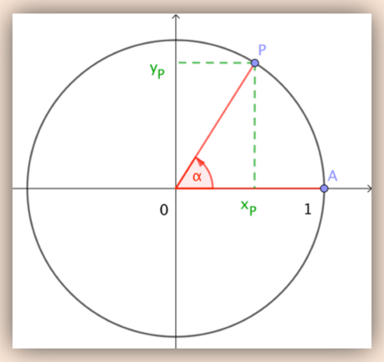
Al termine del lavoro si può assegnare una prova come verifica *1*, che costituisce una sintesi di quanto gli studenti dovrebbero sapere e saper fare relativamente alle funzioni trigonometriche, e di cui dovrebbero disporre a lungo, prima attraverso uno studio orientato in profondità – grazie anche alla scelta dei contenuti e delle modalità, operata dal docente – e poi curandone responsabilmente la *manutenzione*. L'intero percorso richiede circa 20 ore di lezione.

Funzioni trigonometriche: definizione

• Definizione

Consideriamo un punto P su una circonferenza di raggio 1 e centro nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane; allora resta definito un angolo α come in figura[17] (si assume come verso positivo quello antiorario).

Si definisce **seno** di α il numero $\sin\alpha := y_P$, dove y_P è l'ordinata di P, **coseno** di α il numero $\cos\alpha := x_P$, dove x_P è l'ascissa di P.
Inoltre per $\cos\alpha \neq 0$ si definisce **tangente** di α il numero $\tan\alpha := \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.



Per visualizzare la situazione puoi utilizzare i file ***DefSin1.ggb***, ***DefSin2.ggb***.

Ad esempio, se α *misura* $\frac{3\pi}{2}$ *radianti, allora il punto* P *sulla circonferenza ha coordinate* $(0,-1)$. *Pertanto vale* $\sin\alpha = -1$, $\cos\alpha = 0$ *e* $\tan\alpha$ *non è definita.*

Osservazioni

– Se α è un angolo acuto, i valori di $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ secondo le nuove definizioni coincidono con quelli forniti dalle definizioni nel triangolo rettangolo.
Infatti, nel primo biennio abbiamo definito $\sin\alpha = \frac{c}{a}$, *dove* c *è la lunghezza del cateto opposto ad* α *e* a *la lunghezza dell'ipotenusa. Ora, nel triangolo in figura, vale* $c = y_P$ *e* $a = 1$ *in quanto raggio; pertanto* $\frac{c}{a} = y_P$.

[17] Il punto P può aver compiuto più giri completi sulla circonferenza. Pertanto α può essere maggiore dell'angolo giro.

Per $\cos\alpha$ *valgono considerazioni analoghe. Inoltre nel primo biennio abbiamo già mostrato che* $\tan\alpha$ *è uguale a* $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

– Abbiamo definito seno, coseno e tangente come **funzioni** dell'*angolo*. Tuttavia, nel seguito considereremo, al posto dell'angolo, la sua misura in radianti[18] e dunque le interpreteremo come funzioni definite sui **numeri** reali[19].

• Valori notevoli

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Abbiamo già ricavato questi valori nel primo biennio a partire dalle lunghezze dei cateti e dell'ipotenusa di triangoli rettangoli. Osserviamo che non serve calcolarli tutti; infatti, a partire da alcuni valori si possono ***dedurre*** *rapidamente gli altri: ad esempio, noti i valori della funzione seno, si possono ottenere quelli della funzione coseno osservando che* $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, *e quelli della tangente dalla definizione* $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

• Relazioni goniometriche fondamentali

> Vale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

L'uguaglianza era stata già dimostrata nel primo biennio mediante il teorema di Pitagora.

---

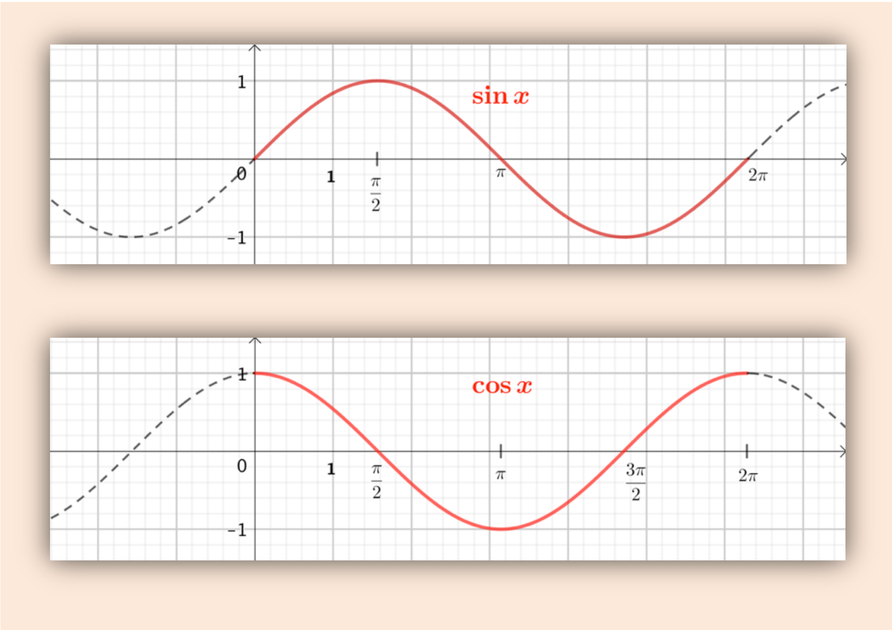
[18] La misura in radianti è *geometrica*, visto che è il rapporto tra la lunghezza dell'arco e il raggio, ossia di grandezze intrinsecamente legate all'angolo, mentre la misura in gradi è più arbitraria, frutto della decisione di suddividere l'angolo giro in 360 parti uguali.
Inoltre nell'ambito delle funzioni si privilegia la misura in radianti poiché se α è misurato in radianti allora la pendenza del grafico della funzione seno in 0 vale 1, ossia è uguale a $\cos 0$. Se invece gli angoli sono misurati in gradi, questa proprietà non vale.
[19] La ragione è che le funzioni trigonometriche non intervengono solo in ambito geometrico, ma sono fondamentali per modellizzare vari fenomeni.

Nel caso generale basta osservare che ad ogni $x \in \mathbb{R}$ corrisponde un punto P sulla circonferenza che ha centro l'origine e raggio 1; pertanto, se P ha coordinate (x_P, y_P), vale $x_P^2 + y_P^2 = 1$. D'altra parte, per definizione di seno e coseno, si ha $\cos x = x_P$ e $\sin x = y_P$. Di qui l'uguaglianza che stiamo esaminando.

Le uguaglianze $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ e $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ sono fondamentali: infatti, a partire da esse si può **ricavare ogni altra uguaglianza** tra $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$.

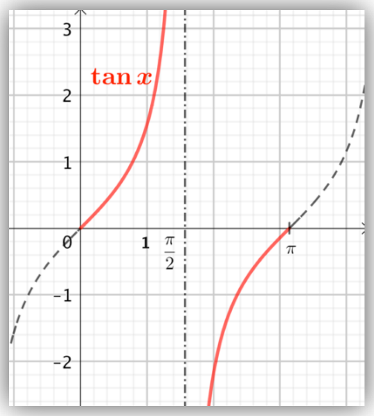
- **Grafici delle funzioni trigonometriche**

Mediante il file ***DefSin3.ggb*** *puoi visualizzare l'andamento del grafico della funzione seno al variare della posizione del punto P sulla circonferenza.*



Pensando alla definizione delle funzioni seno e coseno e ai loro grafici, si deducono le seguenti proprietà elementari.

- Le funzioni seno e coseno sono **periodiche** e hanno periodo 2π
- il grafico della funzione seno è **simmetrico** rispetto all'origine, quello del coseno è simmetrico rispetto all'asse y
- gli **zeri** della funzione seno sono i valori $x = k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, gli zeri del coseno sono $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$
- le funzioni seno e coseno hanno **immagine** $[-1,1]$.



La funzione **tangente** è periodica e ha periodo π. Non è definita per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Ha immagine $\mathbb{R}$.

Infine è opportuno precisare rigorosamente cosa si intende, in generale, per funzione periodica.

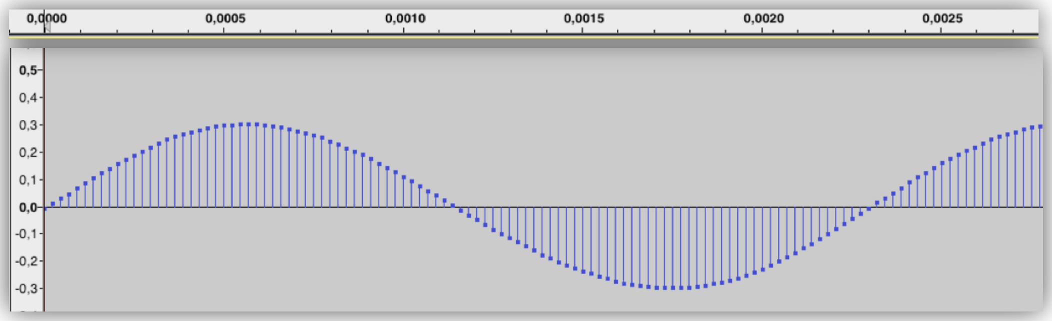
Una funzione f definita sull'insieme $\mathbb{R}$ si dice **periodica** di periodo $T \neq 0$ se vale $f(x+T) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Con questa definizione ogni numero diverso da zero è periodo della funzione costante. Spesso si intende per periodo *il più piccolo* numero $T > 0$ per cui vale tale uguaglianza.

Osservazione. La definizione si può estendere alla funzione tangente: l'uguaglianza deve essere verificata nel suo insieme di definizione.

Un modello trigonometrico

Il grafico mostrato in figura rappresenta il suono emesso da un diapason; precisamente è il grafico della variazione di pressione dell'aria in un punto al variare del tempo t, espressi in opportune unità di misura.
Prova ad indicare come si può ottenere il grafico in figura a partire da quello della funzione sin t.

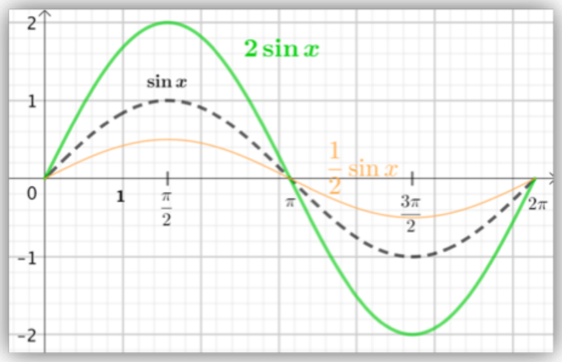


Puoi ascoltare il suono emesso ed esaminarlo mediante il file ***Diapason.wav****.*

Funzione $A\sin(\omega x)$

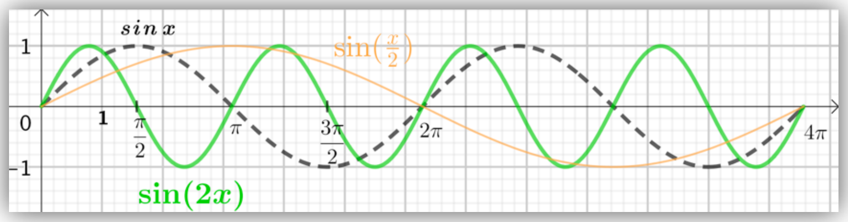
Interpretazione geometrica dei parametri

Parametro A



Il **parametro A** è il fattore per cui si dilata il grafico della funzione $\sin x$ lungo l'asse y per ottenere il grafico della funzione $f(x) = A\sin x$.
È legato all'ampiezza dell'oscillazione e precisamente l'immagine di f è $[-|A|, |A|]$.

Parametro ω



Il **parametro ω** è il fattore per cui si dilata il grafico della funzione $\sin x$ lungo l'asse x per ottenere il grafico della funzione $f(x) = \sin(\omega x)$.
È legato alla frequenza dell'oscillazione[20] e precisamente, per $\omega \neq 0$, il periodo di f è $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Questo risultato si può dimostrare facendo riferimento alla definizione di funzione periodica, che è proposta nella dispensa ***Funzioni trigonometriche: definizione***.

Considerazioni esattamente analoghe valgono per la funzione $A\cos(\omega x)$.

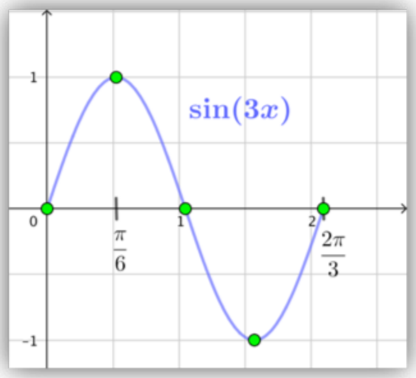
[20] Ossia il numero di oscillazioni che avvengono nell'unità di tempo.

Costruzione del grafico

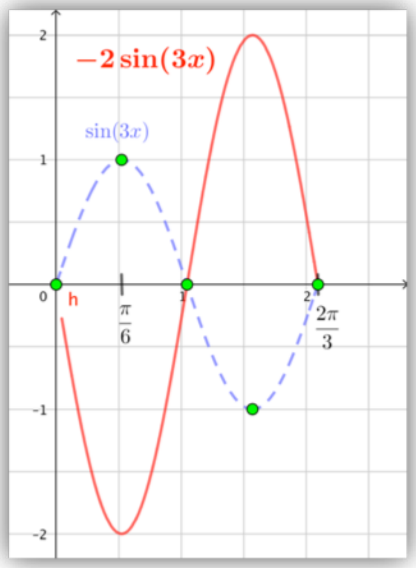
Traccia il grafico della funzione $f(x) = -2\sin(3x)$.

1) *Disegna prima il grafico della funzione* $g(x) = \sin(3x)$. *Per quanto osservato in precedenza, si tratta di una funzione periodica di periodo* $T = \frac{2\pi}{3}$ *e dunque è sufficiente esaminarla nell'intervallo* $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$.

   Per cominciare segna gli zeri 0, $\frac{T}{2}$, T*; poi i punti medi* $\frac{T}{4}$, $\frac{3T}{4}$*: in essi* g *assume rispettivamente massimo e minimo. Traccia di conseguenza il grafico di* g.



2) *Poiché* $f(x) = -2g(x)$, *per ottenere il grafico di* f *basta operare una dilatazione del grafico di* g *lungo l'asse* y *di fattore 2 e una simmetria rispetto all'asse* x.



Osservazione. *Per rappresentare i punti notevoli della funzione* g *nel punto 1, si può seguire un ordine diverso.* Precisamente, *poiché* $\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{6}$, *si possono segnare sul foglio i punti del grafico di ascissa* 0, $\frac{\pi}{6}$, $2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, $3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, $4 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$*: sono i punti speciali in cui la funzione seno assume nell'ordine i valori* $0, 1, 0, -1, 0$.

Approfondimento. Nel *foglio di attività 1* discutiamo la costruzione del grafico della funzione $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Simmetrie del grafico e funzioni pari, dispari

Come abbiamo osservato nella dispensa ***Funzioni trigonometriche: definizione****, i grafici delle funzioni seno e coseno hanno delle simmetrie. Esaminiamo più in generale le funzioni che hanno questo tipo di simmetrie.*

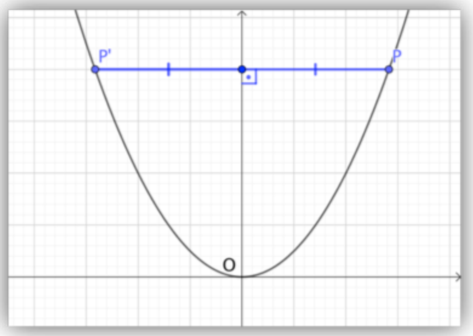
- **Interpretazione geometrica**

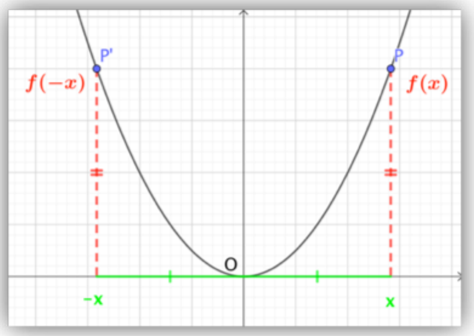
Una funzione **pari** è una funzione che ha grafico simmetrico rispetto all'asse $\boldsymbol{y}$.
Una funzione **dispari** è una funzione che ha grafico simmetrico rispetto all'origine $\boldsymbol{O}$.

Esempi notevoli di funzioni pari sono x^2 e $\cos x$, di funzioni dispari x^3 e $\sin x$. Più in generale, una funzione potenza ad esponente naturale è pari se e solo se l'esponente è pari, è dispari se e solo se l'esponente è dispari.

- **Interpretazione analitica e definizione**

Proseguiamo esaminando la situazione dal punto di vista ***analitico****: quali condizioni (necessarie e sufficienti) soddisfa l'espressione di una funzione che ha uno di questi due tipi di simmetrie?*
Iniziamo con la simmetria rispetto all'asse y *e facciamo riferimento alle figure che seguono.*
A sinistra consideriamo il generico punto P *del grafico di* f *e il suo simmetrico* P' *rispetto all'asse*[21] y*; a destra rappresentiamo le coordinate dei due punti.*

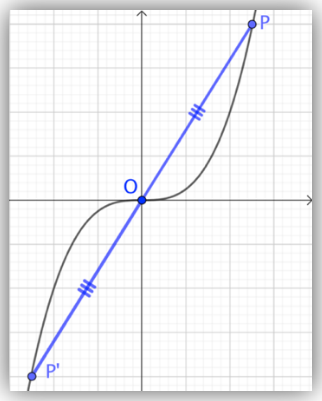


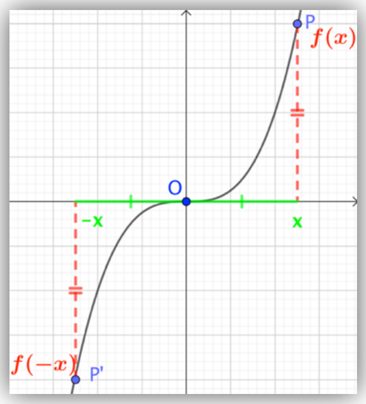


Con l'aiuto delle due figure traduciamo la relazione di simmetria tra i due punti nella condizione $f(-x) = f(x)$. *In modo analogo esaminiamo il caso della simmetria rispetto all'origine*[22] O.

---

[21] La simmetria rispetto ad una retta r trasforma ogni punto P del piano in un punto P' operando in questo modo: si considera la perpendicolare alla retta r passante per P; il punto P' è il punto della perpendicolare tale che il punto medio del segmento PP' appartiene ad r.
[22] La simmetria rispetto ad un dato punto Q trasforma ogni punto P del piano nel punto P' tale che il punto medio del segmento PP' sia Q.





In questo caso si comprende come la condizione per la simmetria sia $f(-x) = -f(x)$. *In particolare tieni presente che le lunghezze dei segmenti sono sempre non negative, mentre le coordinate possono essere negative.*

Possiamo allora dare la seguente

Definizione. Sia f una funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$.
f si dice **pari** se vale $f(-x) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
f si dice **dispari** se vale $f(-x) = -f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Osservazione. *La definizione si può generalizzare ad una funzione* f *definita su un insieme* $A \subset \mathbb{R}$ *simmetrico rispetto all'origine* (ossia se $x \in A \implies -x \in A$).

Dimostra che la funzione $g(x) = x^3 \sin^2(x)$ è dispari.

Dobbiamo provare che $g(-x) = -g(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Esaminiamo prima il fattore $\sin^2(x)$. *Vale*

$$\sin^2(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Osserva che nella prima uguaglianza abbiamo semplicemente utilizzato il significato algebrico della scrittura $\sin^2(t)$ *come* $(\sin t)^2$; *nella seconda il fatto che la funzione* $\sin$ *è dispari e pertanto* $\sin(-x) = -\sin x$.

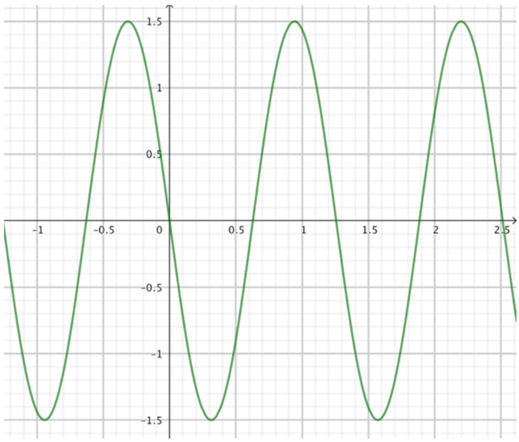
Possiamo così applicare quanto appena ricavato alla funzione g, ottenendo

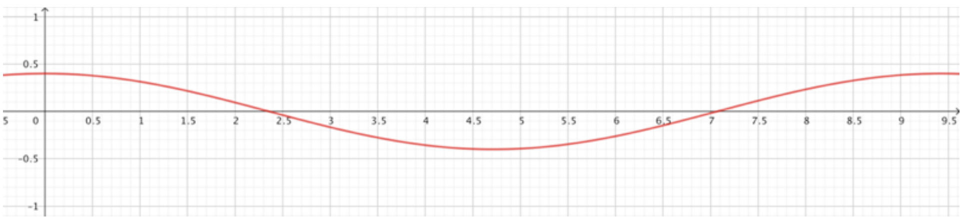
$$g(-x) = (-x)^3 \cdot (\sin(-x))^2 = -x^3 \cdot \sin^2 x = -g(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pertanto concludiamo che effettivamente la funzione g è dispari.

Funzioni trigonometriche – modelli periodici

1. In figura sono rappresentati i grafici delle funzioni $f(t) = A\sin(\omega t)$ e $g(t) = B\cos\left(\frac{\mu}{3}t\right)$.
   Determina il valore dei parametri A e ω, B e μ, sapendo che $\omega, \mu \in \mathbb{N}$.
   Determina poi il più grande zero negativo di g.





2. Considera la funzione $f(x) = \sin(\omega x)$, dove ω è una costante positiva. Se $f(a) = 0$ e $f(b) = 1$, qual è la minima distanza possibile tra a e b?
   [*Da test ingresso nazionale ai corsi di laurea scientifici*]

3. Traccia il grafico delle seguenti funzioni in scala monometrica, indicando le trasformazioni che consideri. Precisa il periodo, l'immagine e il più piccolo zero positivo di ciascuna.
   Poi controlla la correttezza delle risposte con GeoGebra.

$f(x) = \lvert\cos x\rvert$	$f(x) = 1 - \sin x$	$f(x) = 2\sin(x-1)$
$f(x) = -3\sin(3x)$	$f(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$	$f(x) = \sin^2 x$
$f(x) = 2\sin(-x)$	$f(x) = \lvert\cos(x-2)\rvert$	$f(x) = \cos(\pi x)$

4. Traccia il grafico della funzione $f(x) = \cos(3x) + 1$ e determina gli zeri di f sull'insieme $\mathbb{R}$.
Quanti zeri appartengono all'intervallo $[0,7]$?

5. Il 19 giugno 2019 a Port-en-Bessin in Normandia era prevista[23] alta marea circa alle ore 0 (mezzanotte del giorno precedente), con un livello dell'acqua di $7{,}07\ m$; alla bassa marea successiva il livello previsto era di $1{,}31\ m$. L'intervallo di tempo tra due alte maree consecutive è di circa $12{,}5$ ore. Modellizziamo il livello dell'acqua, in metri, al tempo t, in ore, con la funzione $f(t) = A\cos(\omega t) + M$.
   - Determina il valore dei parametri A, ω, M. Quale significato fisico può avere il parametro M?
   - Mediante il nostro modello, calcola il livello dell'acqua alle ore 1. Quale errore percentuale commettiamo rispetto al valore $6{,}81\ m$, fornito dal sito?

6. Intendiamo tracciare il grafico della funzione $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$.
Osserva che la funzione si può esprimere nella forma: $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Pertanto:
   - prima disegna il grafico della funzione $g(x) = 2\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$
   - poi disegna il grafico di f, traslando il grafico di g…

Risultati

1) $f(t) = -\frac{3}{2}sin(5t)$; $g(t) = \frac{2}{5}cos\left(\frac{2}{3}t\right)$ **2)** $\frac{\pi}{2\omega}$ **4)** Zeri: $\left\{\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; 3 zeri nell'intervallo $[0,7]$

5) Decidiamo che la funzione assuma come valore massimo il livello dell'alta marea e come valore minimo il livello della bassa marea agli istanti indicati sul sito.
Di conseguenza, tenendo conto del significato geometrico dei parametri della funzione f, si ottiene: $A = 2{,}88\ m$, $M = 4{,}19\ m$, $\omega \approx 0{,}503\ \frac{rad}{h}$; errore circa dell'1,4%.

[23] https://maree.shom.fr/harbor/PORT-EN-BESSIN/hlt/0?date=2019-06-19&utc=standard

Funzioni trigonometriche – funzioni pari, dispari; ancora modelli

1. Pensa al *grafico* di ciascuna delle seguenti funzioni e, con considerazioni geometriche sulla sua simmetria, indica se si tratta di funzioni pari o di funzioni dispari.

$$f(x) = \cos(x + \tfrac{\pi}{2}) \qquad f(x) = 1 - x^2 \quad f(x) = \ln|x| \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \in (-\infty, 0) \\ x^2 & x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

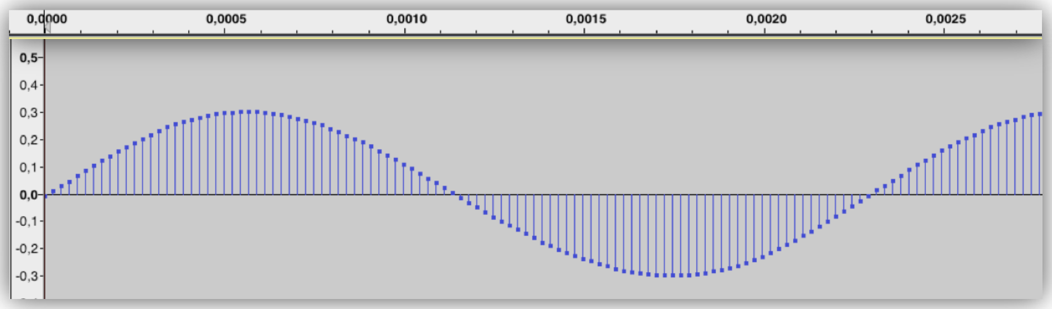
2. Utilizzando le *definizioni*, determina se le seguenti funzioni sono pari o dispari.

$$f(x) = \sin x \cos x \qquad f(x) = \frac{x^2+3}{\sin^3 x} \qquad f(x) = x^5 \sin(2x) \qquad f(x) = |\sin x| + \sqrt{3 - x^2}$$

3. La funzione $f(x) = \sin x + \cos x$ è dispari? È pari? Giustifica in dettaglio le risposte.

4. Siano f e g funzioni definite su $\mathbb{R}$ tali che f è dispari mentre g è pari.
   – Mostra che la funzione $f \cdot g$ è dispari
   – La funzione $f \cdot |g|$ è dispari o è pari? E la funzione $|f| \cdot g$?
   E la funzione $2f \cdot (g + 1)$?

5. In figura è rappresentato un suono che si può descrivere come il grafico di una funzione $f(t) = A\sin(\omega t)$ che fornisce la variazione di pressione dell'aria in un punto al variare del tempo t (in opportune unità di misura).



Scrivi l'espressione di una funzione g che rappresenti, in modo analogo alla funzione f, un suono più grave e di volume minore rispetto a quello descritto in figura.

6. Alcune questioni.
   - Aiutandoti con i grafici, determina la soluzione dell'equazione $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \ln(x-1)$
   - Considera la funzione $f(x) = \sin(kx)$, dove $k > 0$. Se si aumenta il coefficiente k del 20%, come cambia il periodo di f in percentuale?
   - È data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \cos(\sin x)$. Qual è l'immagine di f?
   - Scrivi l'espressione di una funzione trigonometrica f che ha immagine $[-1,2]$.

Alcuni risultati

2) Dispari; dispari; pari; pari

4) $f \cdot |g|$ dispari; $|f| \cdot g$ pari; $2f \cdot (g+1)$ dispari

6) $S = \{2\}$; diminuisce circa del 17%; $[\cos 1,\ 1]$.

Funzioni trigonometriche – equazioni e disequazioni

1. Trova l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni nell'intervallo $[0,2\pi]$.

$\cos x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $|\sin x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$2\cos x + 3 = 0$ $\qquad$ $\cos^2 x = 1$

$4\sin^2 x - 3 = 0$ $\qquad$ $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

$\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$ $\qquad$ $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$

$\sin(2x)\sin(x-1) = 0$ $\qquad$ $2\sin x\cos x - \cos^3 x + \cos x = 0$

2. Trova l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni nell'intervallo $[0,2]$.

$\cos^2(\pi x) + \cos(\pi x) = 0$ $\qquad$ $|\sin(\pi x)| = \frac{1}{2}$

3. – È vero che se $s < t$ allora certamente $\cos s > \cos t$?
   – È vero che se $s^3 < t^3$ allora certamente $s < t$?
   – Determina il più grande intervallo I che abbia la proprietà:

$$\textit{per ogni } s, t \in I \textit{ tali che } s < t, \textit{ vale } s^2 > t^2.$$

   – Individua *un* intervallo I che abbia la proprietà:

$$\textit{per ogni } s, t \in I \textit{ tali che } s < t, \textit{ vale } \sin s < \sin t.$$

Quale lunghezza *massima* può avere un intervallo per cui vale la proprietà indicata?

4. Risolvi le seguenti disequazioni nell'intervallo $[0,2\pi]$.

$\cos x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\sin x\cos x > 0$

$1 - |\sin x| > 0$ $\qquad$ $\dfrac{\sin x}{\sin x - \frac{1}{2}} > 0$

5. Un corpo, che è soggetto ad una forza elastica, si muove lungo una retta con legge oraria $s(t) = 4\sin(2t)$, espressa nelle unità di misura del Sistema Internazionale.
   - Descrivi nel *linguaggio naturale* il moto del corpo al variare del tempo $t \geq 0$
   - Quanto tempo impiega per compiere un'oscillazione completa?
   - Dopo quanto tempo dall'istante iniziale $t = 0$ si trova per la prima volta nella posizione $s = 2$?
   - In un'oscillazione completa il corpo passa più tempo nell'insieme delle posizioni s tali che $|s| \leq 2$ oppure nell'insieme delle posizioni s tali che $2 \leq |s| \leq 4$? *Giustifica con il calcolo.*

Risultati

1) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$; $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

$\emptyset$; $\{0, \pi, 2\pi\}$

$\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$; $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

$\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi\right\}$; $\left\{arcsin\frac{1}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi - arcsin\frac{1}{3}\right\}$

$\left\{0, 1, \frac{\pi}{2}, \pi, \pi + 1, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$; $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$

2) $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$; $\left\{\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{11}{6}\right\}$

4) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$; $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

$[0,2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$; $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup (\pi, 2\pi)$.

Funzioni trigonometriche – ancora equazioni e disequazioni

1. Trova l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni nell'intervallo $[0,2\pi]$.

   $2|\cos x| - 1 < 0$ $\qquad$ $\sin x + \sqrt{3} > 0$

   $3 - 4\cos^2 x \geq 0$ $\qquad$ $5\sin^2 x > 2 - 2\cos x$

   $(\cos x + 1)\cos(x + 1) < 0$ $\qquad$ $\dfrac{1}{\cos x} > -2$

2. Trova l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni negli intervalli indicati.

   $\cos(4\pi x) = 0$ in $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ $\qquad$ $\sin\left(-\frac{\pi}{4}x\right) - 1 = 0$ in $[8,16]$

3. Determina l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni nell'intervallo $[0,2\pi]$, utilizzando i grafici delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$.

   $\sin x \leq 1 + \cos x$ $\qquad$ $\cos x + \sin x < 0$

4. Risolvi le seguenti disequazioni sull'insieme $\mathbb{R}$.

   $\cos x + x < 0$ $\qquad$ *utilizza i grafici delle funzioni base*

   $\frac{1}{2}(x - \sin x) > 0$ [*Esame 2009*] $\qquad$ *ricorri alla definizione di radiante*

5. Considera l'equazione nell'incognita x

   $$\sin x - (k + 1) = 0 \qquad \text{dove } k \text{ è un parametro.}$$

   Per quali valori di k l'equazione ha soluzioni?

   – Invece per quali valori di k l'equazione seguente non ha soluzioni?

   $$(k + 1)\sin x - 3 = 0$$

   – Per quali valori positivi di k l'equazione seguente non ha soluzioni?

   $$(k + 1)\sin(kx) - 3 = 0$$

6. Mediante le simmetrie del grafico delle funzioni trigonometriche mostra che l'espressione

   $$\cos(\pi - x)\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(\pi + x)$$

   è uguale a -1 per ogni x.

Risultati

1) $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$; $[0,2\pi]$

$\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$; $\left(0, arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right) \cup \left(2\pi - arccos\left(-\frac{3}{5}\right), 2\pi\right)$

$\left(\frac{\pi}{2}-1,\frac{3\pi}{2}-1\right) - \{\pi\}$; $\left[0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

2) $\left\{-\frac{7}{8},-\frac{5}{8}\right\}$; $\{14\}$

3) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \cup [\pi, 2\pi]$; $\left(\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi\right)$

4) $(-\infty,\alpha)$ dove $\alpha \in (-1,0)$, $(0,+\infty)$

5) Per $k \in [0,2]$; $(-4,2)$; $(0,2)$.

Derivata delle funzioni trigonometriche

Vogliamo provare a congetturare l'espressione della derivata della funzione seno.

Lo faremo per gradi, nei passi che seguono.

1. Prova prima su **carta**.

   Traccia il grafico della funzione seno e prova fissare alcuni punti e alcune porzioni del grafico della sua funzione derivata.

   Segui l'approccio utilizzato nelle attività sulla funzione derivata che hai affrontato nel percorso sulle derivate.

2. Ora ricorri anche a **GeoGebra**.

   Controlla e completa quanto hai realizzato prima su carta.

   Precisamente, utilizza il file **DerivataSen1.ggb** *e muovi il punto P sul grafico della funzione seno:*
   - *leggi il valore della derivata*
   - *spunta la casella e osserva la porzione del grafico della funzione derivata che viene prodotto dall'applicazione.*

   Poi controlla ulteriormente il grafico della funzione derivata con il file **DerivataSen2.ggb**. *Il punto di arrivo di questa fase dell'attività è produrre un grafico abbastanza preciso della funzione derivata,* ***su carta****: perciò il software è un utile strumento, ma poi riporta sulla carta eventuali modifiche al grafico della funzione derivata che hai prodotto nella fase precedente.*

3. Ora il passo finale.

   Osservando il grafico che hai realizzato, **congettura** quale può essere l'espressione della funzione derivata.

   Tieni presente comunque che il disegno non è una dimostrazione. Potrai dimostrare il risultato corretto più avanti nel percorso, quando saranno stati approfonditi i limiti e, in particolare, il limite notevole che esprime la derivata della funzione seno in $x = 0$.

Poi, in modo analogo, prova a congetturare la derivata della **funzione coseno**.

Funzioni trigonometriche – derivata

1. Traccia il grafico della funzione $f(x) = \sin x$.
   - Determina l'equazione delle rette tangenti al grafico di f nei sui punti di ascissa $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$ e individua le coordinate dei punti A e B in cui le tangenti intersecano l'asse x.
   - Verifica che il punto medio del segmento AB è $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Si poteva prevedere tale risultato senza ricorrere al calcolo?
   - Considera un punto $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e sia $\sin x_0 = a$. Utilizzando la *simmetria* del grafico di f, mostra che la pendenza della retta tangente nel punto $\pi - x_0$ vale $-\sqrt{1 - a^2}$.

2. Determina i punti stazionari delle funzioni seguenti nell'intervallo $[0,2\pi]$.

   $$f(x) = \sin x \cos x - \sin x$$

   $$f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$$

3. Trova i punti stazionari della funzione $f(x) = \frac{\cos x - 1}{\cos x}$ nell'intervallo $[0,2\pi]$; si tratta di punti di massimo o di punti di minimo?

4. La funzione $f(x) = a \sin x + b \cos x$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$. Si trovino a e b [da *Esame 2006*].

5. Un corpo, che è soggetto ad una forza elastica, si muove lungo una retta con legge oraria

   $$s(t) = 3 \sin t$$

   espressa in opportune unità di misura.
   - In quali posizioni la sua velocità è massima? In quali è minima?
   - Prova a giustificare *fisicamente* i risultati ottenuti.

6. Calcola per quale valore di h la retta tangente nell'origine al grafico di $f(x) = \sin(hx)$ forma con l'asse delle x un angolo di 20°.

7. Per quale valore positivo di A le rette tangenti al grafico di $f(x) = A\sin(2x)$ nell'origine e in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ sono perpendicolari? Per il valore di A trovato, rappresenta il grafico di f e le due tangenti.

8. La retta tangente al grafico della funzione $f(x) = A\cos(2x)$ in $x_0 = \frac{\pi}{4}$ individua con gli assi cartesiani un triangolo di area $\frac{\pi^2}{8}$. Quanto vale A?

Risultati

1) Per $x = \frac{\pi}{6}$: $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$, $A\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$. Per $x = \frac{5\pi}{6}$: $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5\sqrt{3}}{6}\pi\right)$, $B\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$

2) $\left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$; $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ **3)** $x = \pi$ punto di minimo; $x = 0, 2\pi$ punti di massimo

4) $a = \sqrt{3}, b = 1$ **6)** Circa 0,36 **7)** $A = \frac{1}{2}$ **8)** $A = 2$

Funzioni trigonometriche – riepilogo

1. Traccia il grafico delle due funzioni seguenti; indica il periodo, l'immagine e quale è il più piccolo zero positivo di ciascuna di esse.

   $f(x) = 2|\sin(x-4)|$ $\qquad$ $g(x) = \sin\left(-\frac{x}{2}\right) + 1$

2. Un fenomeno oscillatorio è descritto al variare del tempo t dalla funzione $f(t) = A\cos(B\pi t) + C$, dove A, B, C sono costanti positive, con $A < C$.
   Traccia il grafico di f nell'intervallo $[0, T]$, dove T è il periodo, e indica le coordinate (in funzione di A, B, C) dei punti del grafico nei quali la funzione ha massimo e minimo e nei quali la funzione vale C.
   La funzione ha zeri? Perché?

3. Trova le soluzioni delle seguenti equazioni e disequazioni nell'intervallo indicato.

   $\sqrt{2}\cos^2 x - \cos x - \sqrt{2} = 0$ $\qquad$ per $x \in [0,2\pi]$

   $|\sin(2\pi x)| = 1$ $\qquad$ per $x \in [0,1]$

   $\dfrac{\sin x - 1}{\sin(x-1)} \geq 0$ $\qquad$ per $x \in [0,2\pi]$

4. La funzione $f(x) = \sin^2 x \cos(2x)$ è pari o dispari? Giustifica la risposta.

5. Calcola la derivata della funzione $f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$. Qual è la pendenza della retta tangente al grafico di f in $x_0 = \frac{11\pi}{6}$?

6. Trova i punti stazionari della funzione $\frac{\sin^2 x - 2}{\sin x}$ nell'intervallo $[0,2\pi]$.

7. Esprimi $\sin(3\alpha)$ in funzione di solo $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ (*osserva che* $3\alpha = 2\alpha + \alpha$).
   Poi prova ad esprimerlo in funzione di solo $\sin\alpha$.

8. In quale sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è definita la funzione $f(x) = \sqrt{\sin x}$?
   Individua una funzione goniometrica il cui insieme di definizione sia

   $$I = \cdots \cup [-4,-2] \cup [0,2] \cup [4,6] \cup [8,10] \cup \ldots$$

9. Con considerazioni grafiche, spiega perché se $\frac{\pi}{2} < c < \pi$ allora vale

   $$\arcsin(\sin c) = \pi - c.$$

Alcuni risultati

2) Massimo in $(0, C + A)$ e $\left(\frac{2}{B}, C + A\right)$…, non ha zeri

3) $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$; $\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$; $[0, 1) \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \cup (\pi + 1, 2\pi]$

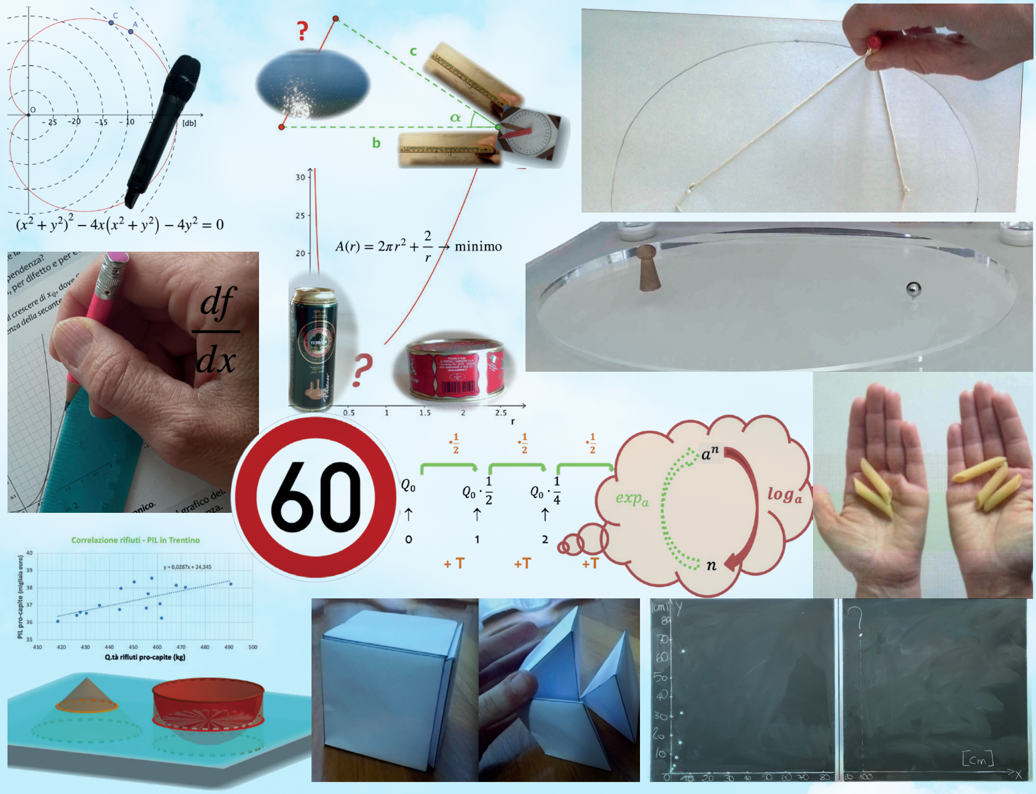
5) $f'(x) = \frac{2\sin^2 x - 1}{(\sin x \ \cos x)^2}$; $f'\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{8}{3}$

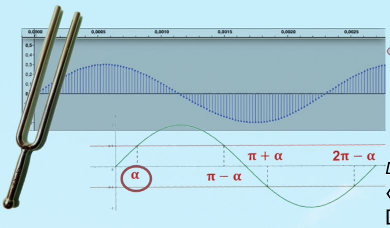
6) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, il primo è punto di massimo, il secondo di minimo

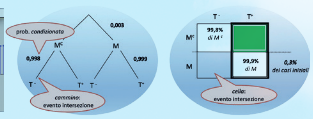
7) $3\cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha$.

Bibliografia e sitografia del capitolo 3

[Orientamat, 2006] Sito del *Progetto Orientamat.*
http://www.science.unitn.it/orientamat/
[Mariotti, 2022] Mariotti, M.A. (2022). *Argomentare e dimostrare come problema didattico.* UTET.
[MIUR, 2018b] *Indicazioni nazionali e nuovi scenari.*
https://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+-scenari/

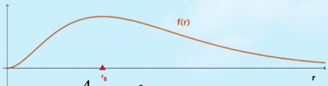




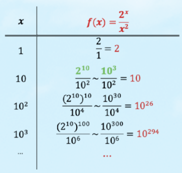


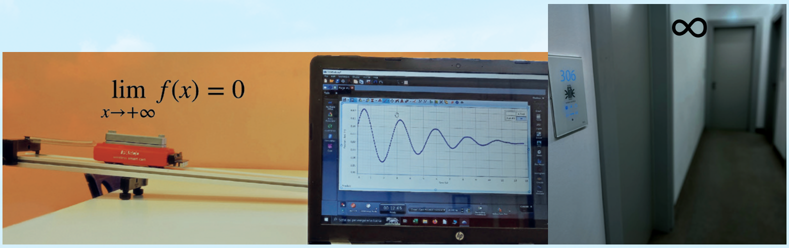
Da La Repubblica, 6 giugno 2017
Bari-Malpensa, ... overbooking: offerti 200 euro, pranzo e hotel...

Da La Repubblica, 15 maggio 2008
«Lei è sieropositivo» ma era falso
Dopo 3 anni risarcito: 200.000 euro



$$f(r)=\frac{4}{r_B^3}r^2e^{-\frac{2r}{r_B}}, f'(r)\ldots$$





ISBN 978-88-7702-531-9